I seria zadań: Zadania ogólne

24 lutego 2020

Zadanie 1 (!)**.** Niech A będzie skończeniewymiarową algebrą Banacha z jedynką oraz $x, y \in A$ są takie, że $xy = e$. Wykaż, że elementy x, y są odwracalne. Sprawdź, że tak nie musi być, gdy A jest nieskończeniewymiarowa. Wtedy jednak yx jest nietrywialnym idempotentem.

Zadanie 2 (!)**.** Znaleźć wszystkie dwuwymiarowe zespolone algebry Banacha z jedynką.

Zadanie 3 (!)**.** Wykazać, że jeśli A jest przemienną algebrą z normą, która spełnia $||x^2|| = ||x||^2$, to ta norma jest podmultiplikatywna.

Zadanie 4. Niech A będzie algebrą Banacha, a x, y komutującymi idempotentami ($x^2 = x$, $y^2 = y$, $xy = yx$). Udowodnić, że $x = y$ lub $||x - y|| \geqslant 1$.

Definicja 1. Przemienna algebra Banacha A nazywa się wierną, gdy warunek $Aa = \{0\}$ dla $a \in A$ implikuje $a = 0$. Odwzorowanie $T : A \mapsto A$ jest mnożnikiem, gdy $x(Ty) = (Tx)y$ zachodzi dla wszystkich $x, y \in A$ (A jest tutaj przemienną algebrą Banacha).

Zadanie 5. Niech A będzie wierną algebrą Banacha. Wykazać, że $M(A)$ - zbiór mnożników na A jest domkniętą podalgebrą z jedynką algebry $B(A)$.

Zadanie 6. Sprawdzić, że jeśli A jest przemienną algebrą Banacha z jedynką, to $M(A) = A$.

Zadanie 7. Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą. Wykazać, że $M(C_0(X))$ jest izometrycznie izomorficzne (jako algebry Banacha) z $C_B(X)$.

Zadanie 8. Sprawdzić, że dla $1 \leqslant p < \infty$ zachodzi $M(l^p(\mathbb{N})) \simeq l^\infty(\mathbb{N})$ (izometryczny izomorfizm algebr Banacha). Przypominam, że na $l^p(\mathbb{N})$ mnożenie jest punktowe!.

Zadanie 9. Niech A będzie wierną algebrą Banacha oraz $T \in M(A)$ będzie bijektywny. Sprawdź, że $T^{-1} \in M(A)$.

Zadanie 10. Niech A będzie algebrą Banacha, a $\Omega \subset \mathbb{C}$ - zbiorem otwartym oraz $f : \Omega \mapsto A$, $h : \mathbb{C} \mapsto \Omega$ funkcjami holomorficznymi. Wykaż, że funkcja $f \circ g : \mathbb{C} \mapsto A$ jest holomorficzna.

Zadanie 11. Sprawdzić, że algebry $M(\mathbb{T})$ oraz $M(\mathbb{R})$ nie są izomorficzne.

Zadanie 12. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $A = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \widehat{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Sprawdź, że A z normą $||f|| = ||f||_1 + ||\widehat{f}||_p$ jest algebrą Banacha.

Zadanie 13 (!)**.** Niech $L^1(\mathbb{R}^+)$ będzie podalgebrą $L^1(\mathbb{R})$ składającą się z tych f, które spełniają $f(t) = 0$ dla $t < 0$. Udowodnij, że $L^1(\mathbb{R}^+)$ jest generowana przez funkcję $f(t) = e^{-t}$ dla $t \geqslant 0$ oraz $f(t) = 0$ dla $t < 0$ (czyli najmniejsza domknięta podalgebrą zawierająca tę funkcję jest równa $L^1(\mathbb{R}^+)$).

Zadanie 14 (!)**.** Wykazać, że jeśli A jest zespoloną algebrą Banacha z jedynką o własności

$$\underset{M<\infty}{\exists} ||x|| \cdot ||y|| \leqslant M||xy||,$$

to A jest izometrycznie izomorficzne z $\mathbb{C}$.

Wracamy do mnożników.

Zadanie 15. Niech A będzie przemienną, wierną, zespoloną algebrą Banacha oraz $T \in M(A)$. Udowodnić, że wówczas istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła f na $\mathfrak{M}(A)$ taka, że

$$\widehat{Tx}(\varphi) = f(\varphi)\widehat{x}(\varphi)$$

dla wszystkich $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ oraz $x \in A$. Uzasadnić również, że f jest ograniczona i $||f||_\infty \leqslant ||T||$.

Zadanie 16. Niech A będzie przemienną, zespoloną, półprostą i wierną algebrą Banacha. Dla $T \in M(A)$, niech f_T określa funkcję ciągłą z poprzedniego zadania. Wykazać, że $T \mapsto f_T$ jest ciągłym izomorfizmem $M(A)$ na podalgebrę $B \subset C_B(\mathfrak{M}(A))$

$$B = \{f \in C_B(\mathfrak{M}(A)) : f \cdot \widehat{x} \in \widehat{A} \text{ dla wszystkich } x \in A\}.$$

Zadanie 17. Niech A będzie przemienną, półprostą, zespoloną algebrą Banacha i niech $T \in B(A)$. Wykaż, że $T \in M(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ istnieje stała $c(\varphi)$ taka, że $T^*(\varphi) = c(\varphi)\varphi$ (T^* oznacza operator sprzężony).