II seria zadań: Grupa elementów odwracalnych i exp

2 marca 2020

Zadanie 1. Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką. Wykazać, że A jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $C > 0$ spełniająca $||xy|| \leqslant C||yx||$ dla wszystkich $x, y \in A$. Wskazówka: Rozważyć funkcję $f(\lambda) = \Lambda(e^{\lambda x} y e^{-\lambda x})$ dla $\Lambda \in A^*$ lub bez Λ jak ktoś woli.

Pełne rozwiązanie następnego zadania nie leży na razie w naszej mocy, dlatego należy się tylko zastanowić.

Zadanie 2. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką. Wtedy $\exp : A \mapsto G(A)$ jest homomorfizmem grupy addytywnej A w grupę multiplikatywną elementów odwracalnych algebry A. Zastanowić się, jakie jest $\ker(\exp)$.

Zadanie 3. Wykazać, że dwa odwracalne elementy $C(\mathbb{T})$ są w tej samej warstwie względem G_1 wtedy i tylko wtedy, gdy są homotopijnymi odwzorowaniami $\mathbb{T}$ w zbiór niezerowych liczb zespolonych. Wywnioskować stąd, że

$$G(A)/G_1 \simeq \mathbb{Z}.$$

Zadanie 4. Niech $A = M(\mathbb{R})$ będzie algebrą Banacha miar na prostej. Wykazać, że grupa $G(A)/G_1$ jest nieprzeliczalna. Wskazówka: Rozważyć delty Diraca.

Zadanie 5. Niech $A = l^\infty(\mathbb{Z})$. Wykazać, że $G(A)/\mathrm{Exp}(A)$ jest trywialna.

Zadanie 6. Niech $C_\mathbb{R}$ będzie algebrą wszystkich funkcji ciągłych na $[0, 1]$ o wartościach rzeczywistych z mnożeniem punktowym i normą supremum. Wykaż, że G/G_1 jest grupą rzędu 2, czyli twierdzenie Lorcha nie zachodzi.

Następne zadanie to wzmocnienie Zadania 1.

Zadanie 7. Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką. Udowodnić, że jeśli zachodzi jeden z warunków $||x||^2 \leqslant C||x^2||$ lub $||x|| \leqslant Cr(x)$ dla wszystkich $x \in A$, to A jest przemienna.

Zadanie 8. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką oraz x_n, s_n będą ciągami elementów takich, że $x_n s_n = e$. Sprawdzić, że jeśli ciąg x_n jest zbieżny do $x \in A$ oraz ciąg s_n jest ograniczony, to x jest odwracalny. Udowodnić to samo przy założeniu ograniczoności ciągu $r(s_n)$.