III seria zadań: Spektrum i promień spektralny

9 marca 2020

Najbliższa definicja i dalsze zadania stanowią nieco inne podejście do pojęcia promienia spektralnego i spektrum niż to było przedstawione na wykładzie.

Definicja 1. Niech A będzie algebrą Banacha. Określamy promień spektralny elementu $x \in A$ wzorem

$$r(x) = \inf\{ \sqrt[n]{||x^n||} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Zadanie 1. Niech A będzie algebrą Banacha. Wykazać, dla dowolnych $x, y \in A$, $\lambda \in K$, następujące fakty:

1. Zachodzi wzór na promień spektralny
$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||x^n||}.$$
2. $r(\lambda x) = |\lambda| r(x)$.
3. $0 \leqslant r(x) \leqslant ||x||$
4. (!) $r(xy) = r(yx)$
5. (!) Jeśli $x_n \to x$ przy $n \to \infty$, to
$$\limsup_{n\to\infty} r(x_n) \leqslant r(x).$$
6. (!) Jeśli x, y komutują ($xy = yx$), to
$$r(x + y) \leqslant r(x) + r(y) \text{ oraz } r(xy) \leqslant r(x)r(y).$$

Zadanie 2 (!)**.** Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz $x \in A$ spełnia $r(x) < 1$. Wówczas $e - x$ jest odwracalny i zachodzi

$$(e - x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Zmierzamy do uprawomocnienia nazwy "promień spektralny". Przypominamy definicję.

Definicja 2. Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz $x \in A$. Określamy spektrum elementu x jako zbiór

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ nie jest odwracalny}\}.$$

W przypadku, gdy algebra A nie ma jedynki określamy spektrum elementu jako spektrum w algebrze z dołączoną jedynką.

Zadanie 3. Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha i $x \in A$. Wówczas $\sigma(x)$ jest niepustym zbiorem zwartym oraz

$$\max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = r(x).$$

Plan działania: Domkniętość jest łatwa. W oparciu o poprzednie zadanie dowodzimy, że $\sigma(x)$ jest zawarte w kole o środku w zerze i promieniu $r(x)$. Sprawdzić dalej, że funkcja $(\lambda e - x)^{-1}$ jest słabo holomorficzną funkcją zmiennej λ na dopełnieniu spektrum. Dowieść jej ograniczoności i wywnioskować stąd niepustość spektrum. Przyjąć $s(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ i założyć nie wprost, że istnieje $t \in \mathbb{R}$ spełniające $s(x) < t < r(x)$. Rozwinąć funkcję $f(\lambda) = \Lambda((\lambda e - x)^{-1})$, $\Lambda \in A^*$ w szereg Laurenta, skorzystać z twierdzenia Banacha - Steinhausa i doprowadzić do sprzeczności.

Istnieje dowód podstawowego twierdzenia o spektrum nie używający (prawie) analizy zespolonej i jeśli ktoś ma ochotę na dodatkowe zadanie, to proszę dać mi znać.

Zadanie 4 (!)**.** Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką. Wykazać, że dla dowolnych elementów $x, y \in A$ zachodzi

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}.$$

Sprawdzić także, że nie zawsze zachodzi $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

Zadanie 5 (!)**.** Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha oraz p wielomianem jednej zmiennej (bez wyrazu wolnego, jeśli A nie ma jedynki). Wykazać prostą wersję twierdzenia o odwzorowaniu spektralnym

$$p(\sigma(x)) = \sigma(p(x)) \text{ dla } x \in A.$$

Udowodnić analogiczną tezę dla funkcji wymiernych jednej zmiennej z biegunami poza $\sigma(x)$ (ograniczyć się do algebr z jedynką).

Zadanie 6 (!)**.** Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką oraz $x \in A$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne

1. $\rho_A(x)$ jest spójne.
2. $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ dla każdej domkniętej podalgebry B z jedynką, zawierającej x.

Zadanie 7 (!)**.** Niech B będzie domkniętą podalgebrą $l^1(\mathbb{Z})$ składającą się z tych $x = (x_n)_n \in l^1(\mathbb{Z})$, które spełniają $x_n = 0$ dla $n < 0$. Pokaż, że $\sigma_A(\delta_1) \neq \sigma_B(\delta_1)$ (δ_1 to ciąg, który ma jedynkę na miejscu pierwszym, a poza tym zero).

Zadanie 8 (!)**.** Niech $X = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$ i $f(z) = z$ dla $z \in X$. Niech A będzie najmniejszą domkniętą podalgebrą $C(X)$ zawierającą 1 oraz f, a B najmniejszą domkniętą podalgebrą $C(X)$ zawierającą f i $1/f$. Znaleźć $\sigma_A(f)$ oraz $\sigma_B(f)$. Zrobić to samo, gdy X jest okręgiem.

Zadanie 9 (!)**.** Określmy na $L^1[0,1]$ mnożenie za pomocą wzoru

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds \text{ dla } f, g \in L^1[0,1],\ t \in [0,1].$$

Sprawdzić, że każdy element $f \in L^1[0,1]$ spełnia $r(f) = 0$ (takie elementy nazywamy quasi-nilpotentnymi lub topologicznymi nilpotentami).

Zadanie 10 (!)**.** Przypuśćmy, że Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbb{C}$, α jest izolowanym punktem brzegowym Ω, $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ jest holomorficzną funkcją o wartościach w X, gdzie X jest zespoloną przestrzenią Banacha, i istnieje najmniejsza liczba całkowita nieujemna n taka, że

$$|\lambda - \alpha|^n ||f(\lambda)||$$

jest ograniczona przy $\lambda \mapsto \alpha$. Jeśli $n > 0$, to mówimy, że f ma biegun rzędu n w punkcie α.

1. Przypuśćmy, że $x \in A$ i $(\lambda e - x)^{-1}$ ma biegun w każdym punkcie $\sigma(x)$. Udowodnij, że istnieje nietrywialny wielomian P o własności $P(x) = 0$.

2. Wywnioskować z poprzedniego, iż jeśli $\sigma(x) = \{0\}$ i $(\lambda e - x)^{-1}$ ma biegun rzędu n w 0, to $x^n = 0$.

Dla funkcji określonej na liczbach nieujemnych określamy $(S_R f)(n) = f(n-1)$, jeśli $n \geqslant 1$ oraz $(S_R f)(0) = 0$.

Zadanie 11 (!)**.** Niech S_R będzie prawostronnym przesunięciem działającym na l^2 i niech $\{c_n\}$ będzie zbieżnym do zera ciągiem niezerowych liczb zespolonych. Zdefiniujmy $M \in B(l^1)$ wzorem

$$(Mf)(n) = c_n f(n)\ (n \geqslant 0)$$

i określmy $T \in B(l^1)$ jako $T = MS_R$.

1. Oblicz $||T^m||$ dla $m \in \mathbb{N}$.

2. Pokaż, że $\sigma(T) = \{0\}$.

3. Pokaż, że T nie posiada wartości własnych.

4. Pokaż, że $(\lambda I - T)^{-1}$ nie ma bieguna w zerze.

5. Pokaż, że T jest operatorem zwartym.

Zadanie 12. Niech $x \in A$ (zespolona algebra Banacha z jedynką) i $x_n \to x$ przy $n \to \infty$. Przypuśćmy, że Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ zawierającym składową $\sigma(x)$. Udowodnij, że $\sigma(x_n)$ przecina Ω dla wszystkich dostatecznie dużych n.

Ostatnie dwa zadania to ciekawe charakteryzacje promienia spektralnego.

Zadanie 13. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką. Przyjmijmy

$$K_1 = \{x \in A : \lim_{n\to\infty} x^n = 0\}$$

$$K_2 = \{x \in A : \underset{n>0}{\exists} ||x^n|| < 1\}.$$

Wykazać, że $K_1 = K_2$ i że zbiór $K := K_1 = K_2$ jest otwartym, wypukłym i symetrycznym podzbiorem algebry A. Udowodnić, że funkcjonał Minkowskiego odpowiadający zbiorowoi K, tzn.

$$p(x) = [\sup\{|\lambda| : \lambda x \in K\}]^{-1}$$

jest równy promieniowi spektralnemu.

Definicja 3. Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką i normą $||\cdot||$. Normą dopuszczalną na A będziemy nazywać każdą normę podmultiplikatywną (na jedynce algebry ma wartość 1) $||\cdot||_\alpha$, równoważną z normą $||\cdot||$. Zbiór norm dopuszczalnych będziemy oznaczać przez D.

Zadanie 14. Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką. Wykazać, że

$$r(x) = \inf\{||x||_\alpha : ||\cdot||_\alpha \in D\}.$$