# IV seria zadań: Topologiczne dzielniki zera

29 października 2015

**Definicja 1.** Niech $A$ będzie algebrą Banacha. Element $x \in A$ nazywamy topologicznym dzielnikiem zera, gdy istnieje ciąg $y_n \in A$ taki, że $||y_n|| = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$ i spełniający $xy_n \to 0$ lub $y_n x \to 0$ (można oczywiście mówić o dwustronnych topologicznych dzielnikach zera). Oczywiście można zakładać $||y_n|| \geqslant \delta > 0$ zamiast $||y_n|| = 1$.

Z pierwszego zadania wynika, że topologiczne dzielniki zera to takie elementy "permanentnie nieodwracalne"

**Zadanie 1.** Niech $A$ będzie algebrą z jedynką. Sprawdzić, że topologiczne dzielniki zera nie są odwracalne. Co więcej, jeśli nasza algebra jest domkniętą podalgebrą z jedynką pewnej algebry Banacha $B$, to topologiczne dzielniki zera w $A$ pozostają nieodwracalne w $B$.

**Zadanie 2.** Niech $A$ będzie algebrą Banacha z jedynką. Wykazać, że każdy element brzegowy grupy elementów odwracalnych jest topologicznym dzielnikiem zera.

**Zadanie 3.** Niech $A$ będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką. Wykaż, że $A$ nie zawiera (nietrywialnych) topologicznych dzielników zera wtedy i tylko wtedy, gdy $A$ jest izomorficzne z $\mathbb{C}$.

**Zadanie 4.** Rozwiązać analogiczne zadanie jak poprzednie bez założenia istnienia jedynki.

Następne zadanie pokazuje, że przy stosownym zanurzeniu można topologiczne dzielniki zera traktować jako "prawdziwe" dzielniki zera.

**Zadanie 5.** Niech $A$ będzie algebrą Banacha. Wykazać, że istnieje algebra Banacha $\widetilde{A}$ taka, że $A$ jest algebrą izometrycznie izomorficzną z pewną jej domkniętą podalgebrą o tej własności, iż każdy topologiczny dzielnik zera w $A$ jest dzielnikiem zera w $\widetilde{A}$.
Wskazówka: Weźmy za $A'$ algebrę ciągów $x = (x_n) \subset A$ takich, że $|||x||| = \limsup ||x_n|| < \infty$. Oznaczmy przez $N$ ideał algebry $A'$ składający się z tych ciągów $x$, które spełniają $|||x||| = 0$. Określić $\widetilde{A} = A'/N$ i sprawdzić, że to działa.

**Zadanie 6.** Niech $A$ będzie algebrą Banacha z jedynką. Dla $x \in A$ rozważamy operator $L_x : A \mapsto A$ określony wzorem $L_x(y) = xy$. Przeanalizować, jakie własności elementu $x$ są równoważne podanym własnościom operatora $L_x$.

1. $L_x$ jest bijekcją.
2. $L_x$ nie jest różnowartościowy.
3. $L_x$ jest różnowartościowy i ma domknięty obraz, ale nie jest surjekcją.
4. $L_x$ jest różnowartościowy, ale nie ma domkniętego obrazu.

Jeśli $A$ jest algebrą Banacha, to dla $x \in A$ przyjmujemy

$$xA = \{xy : y \in A\}.$$

**Zadanie 7.** Wywnioskować z poprzedniego zadania, że element $x$ przemiennej algebry Banacha $A$ z jedynką nie będący dzielnikiem zera jest topologicznym dzielnikiem zera wtedy i tylko wtedy, gdy $xA \neq \overline{xA}$. Podać przykład dzielnika zera $x$ w pewnej algebrze Banacha z jedynką $A$ o własności $xA = \overline{xA}$.

**Zadanie 8.** Wykazać, że każda funkcja z $L^1(\mathbb{T})$ jest topologicznym dzielnikiem zera.

**Zadanie 9.** Niech $A$ będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką i niech $x \in A$. Wykazać, że element $x$ jest permanentnie nieodwracalny (nieodwracalny w dowolnej nadalgebrze) wtedy i tylko wtedy, gdy jest topologicznym dzielnikiem zera.
Wskazówka: Wystarczy pokazać, że element $z \neq 0$, który nie jest topologicznym dzielnikiem zera można odwrócić w pewnej nadalgebrze. Rozważyć algebrę szeregów

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

gdzie $a_n \in A$ oraz $t \in [0,1]$ z normą $\|\widetilde{x}\| = \sum \|a_n\|$. $A$ zanurza się w $\widetilde{A}$ jako szeregi stałe. Rozważyć ideał $I = (e - z \cdot t)$ i algebrę ilorazową $\widetilde{A}/I$.

**Zadanie 10.** Udowodnić, że każdy element należący do radykału algebry jest topologicznym dzielnikiem zera.

**Zadanie 11.** Niech $A$ będzie algebrą Banacha z jedynką. Dla $x \in A$ rozważmy funkcje

$$d(x) = \inf_{y \neq 0} \frac{\|xy\|}{\|y\|}, \ c(x) = \inf_{y \neq 0} \frac{\|yx\|}{\|y\|}$$

Uzasadnić, że $x$ jest lewostronnym topologicznym dzielnikiem zera wtedy i tylko wtedy, gdy $d(x) = 0$ i analogicznie z drugiej strony $c(x) = 0$. Udowodnić następujące fakty o funkcjach $d$ i $c$:

1. $|d(x) - d(y)| \leqslant \|x - y\|, \ |c(x) - c(y)| \leqslant \|x - y\|$

2. $d(x)d(y) \leqslant d(xy) \leqslant \|x\| d(y), \; c(x)c(y) \leqslant c(xy) \leqslant c(x)\|y\|$

**Zadanie 12.** Wywnioskować z poprzedniego zadania, że zbiór lewostronnych (prawostronnych) topologicznych dzielników zera jest domknięty. Uzasadnić również, że jeśli $xy$ jest lewostronnym (prawostronnym) topologicznym dzielnikiem zera, to $x$ lub $y$ jest lewostronnym (prawostronnym) topologicznym dzielnikiem zera.