V seria zadań: Algebra $B(X)$

1 kwietnia 2020

Zadanie 1. Niech $T \in B(X)$ będzie operatorem zwartym spełniającym $||T^n|| \geqslant 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij, że T ma wartość własną.

Zadanie 2. Znajdź spektrum operatora $T \in B(l^2)$ zadanego przez

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots).$$

Następne zadanie to przykład ciągu topologicznych nilpotentów zbieżnych do elementu, który nie jest topologicznym nilpotentem (nieciągłość spektrum).

Zadanie 3 (Kakutani,Rickart)**.** Niech $e_k = (\delta_{ik})_{i=1}^{\infty} \in l^2$, $k \in \mathbb{N}$. Określmy operator $Te_k = \alpha_k e_{k+1}$, gdzie pisząc $k = 2^m(2l+1)$ kładziemy $\alpha_k = \exp(-m)$, $k, l = 0, 1, \ldots$. Sprawdzić, że $||T|| = \sup |\alpha_k|$. Wykazać dalej, że $\sigma(T)$ zawiera liczby różne od zera. Określmy operatory T_n kładąc

$$T_n e_k = \begin{cases} 0 \; dla \; k = 2^n(2l+1), \\ \alpha_k e_{k+1} \; dla \; k \neq 2^n(2l+1). \end{cases}$$

Uzasadnić, że $r(T_n) = 0$ oraz $||T_n - T|| \to 0$ przy $n \to \infty$.

Zadanie 4. Niech $T \in B(X)$, gdzie X jest przestrzenią Banacha. Wykaż, że $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ (T^* to operator sprzężony, więc drugie spektrum rozpatrujemy w algebrze $B(X^*)$).

Definicja 1. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Dla $\omega \in X^*, y \in X$ wprowadzamy operator $y \otimes \omega$:

$$(y \otimes \omega)(z) = \omega(z)y \text{ dla każdego } z \in X.$$

Operator $T \in B(X)$ nazywamy operatorem skończonego rzędu, gdy wymiar jego obrazu jest skończony. Zbiór takich operatorów będziemy oznaczać przez $B_F(X)$.

Zadanie 5. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Wykazać, że

$$B_F(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \omega_j : n \in \mathbb{N}; x_j \in X; \omega_j \in X \right\}.$$

Uzasadnić także, że $B_F(X)$ jest ideałem w $B(X)$, który jest zawarty w każdym niezerowym ideale.

Następne zadania prowadzą do słynnego wyniku Eidelheita o jednoznaczności normy na $B(X)$. Zaczynamy od *lematu Eidelhata*.

Zadanie 6. Niech A będzie domkniętą podalgebrą $B(X)$, która zawiera $B_F(X)$. Wykazać, że podzbiór $\mathcal{S} \subset A$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $T \in B_F(X)$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że operator $I - \lambda TS$ jest odwracalny dla wszystkich $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ i $S \in \mathcal{S}$.
Wskazówki: Dołożyć do A operator identycznościowy na X. Jeśli S jest ograniczony, to wziąć ε taki, aby założenie $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ pociągało za sobą $||\lambda TS|| < 1$. W drugą stronę, założyć, że $\mathcal{S}$ nie jest ograniczony. Uzasadnić, iż istnieje $x \in X$ oraz $\omega \in X^*$, dla których $\{\omega(Sx) : S \in \mathcal{S}$ jest nieograniczony. Odpowiednio zdefiniować $T \in B_F(X)$ i dojść do sprzeczności.

W następnym zadaniu mamy opis izomorfizmów między algebrami operatorów.

Zadanie 7. Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha oraz A, B domkniętymi podalgebrami $B(X)$ i $B(Y)$ (odpowiednio) zawierającymi operatory skończonego rzędu. Wykazać, że jeśli $\Phi : A \mapsto B$ jest izomorfizmem algebraicznym, to istnieje liniowy, ciągły izomorfizm $P : X \mapsto Y$ spełniający

$$\Phi(S) = PSP^{-1} \text{ dla wszystkich } S \in A.$$

Wskazówki: Wziąć $x \in X$ i funkcjonał liniowy $\tau \in X^*$ taki, że $\tau(z) = 1$. Wówczas $z \otimes \tau$ jest idempotentem rzędu 1. Wykazać, że $\Phi(z \otimes \tau)$ również jest idempotentem rzędu 1, czyli możemy napisać $\Phi(z \otimes \tau) = w \otimes \sigma$ dla pewnego $w \in Y$ oraz $\sigma \in Y^*$ o własności $\sigma(w) = 1$. Sprawdzić tożsamość

$$\Phi(x \otimes \tau) = \Phi(x \otimes \tau)\Phi(z \otimes \tau) = \Phi(x \otimes \tau)(w \otimes \sigma) = y \otimes \sigma.$$

dla pewnego $y \in Y$, które zależy od x liniowo. Określić $P(x) = y$ i sprawdzić, że to działa, a ciągłość Φ wywnioskować z poprzedniego zadania.

W następnym zadaniu należy znów skorzystać z przedostatniego.

Zadanie 8. Niech A będzie domkniętą podalgebrą $B(X)$ zawierającą $B_F(X)$. Wykazać, że każde dwie zupełne i podmultiplikatywne normy na A są równoważne.

Ostatnie jest dla rozrywki.

Zadanie 9. Niech X będzie algebrą Banacha i niech A będzie niezerowym ideałem lub dowolną podalgebrą zawierającą $B_F(X)$. Wykazać, że wówczas każda podmultiplikatywna (niekoniecznie zupełna) norma na A dominuje normę operatorową.