XII seria zadań: Algebry Banacha z inwolucją

25 listopada 2015

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli każdy element w algebrze z inwolucją jest normalny, to ta algebra jest przemienna.

Zadanie 2. Niech A będzie algebrą Banacha z inwolucją. Wykazać, że jeśli zbiór elementów normalnych ma niepuste wnętrze, to A jest przemienna.

Zadanie 3. Wykazać, że *-algebra Banacha z inwolucją i jedynką A jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy element $e + x^*x$ jest odwracalny dla każdego $x \in A$.

Zadanie 4. Sprawdzić, że iloczyn elementów hermitowskich jest hermitowski wtedy i tylko wtedy, gdy te elementy komutują.

Zadanie 5. Niech A będzie C^* algebrą z jedynką. Wykazać, że e jest punktem ekstremalnym kuli jednostkowej.

Zadanie 6. Niech A będzie C^* algebrą. Wykazać, że $A = A^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie A^n jest przestrzenią liniową rozpiętą przez iloczyny n elementów z A.

Zadanie 7. Niech A będzie C^* algebrą oraz niech $x, y \in A$ spełniają $x \leqslant y$ oraz $x, y \geqslant 0$. Udowodnić, że wówczas $\|x\| \leqslant \|y\|$.

Zadanie 8. Niech A będzie algebrą Banacha z izometryczną inwolucją oraz B - C^* - algebrą. Wykaż, że każdy * - homomorfizm $f : A \mapsto B$ spełnia $||f(x)|| \leqslant ||x||$ dla każdego $x \in A$.

Zadanie 9. Niech A będzie C^* algebrą z jedynką. Wykaż, że każdy element unitarny w A ma spektrum zawarte w okręgu jednostkowym.

Zadanie 10. Wykaż, że każdy element w C^*-algebrze jest kombinacją liniową co najwyżej czterech elementów unitarnych.

Zadanie 11. Niech x będzie elementem hermitowskim w C^* algebrze A. Wykazać (proszę korzystać z wiedzy przedstawionej na wykładzie) równoważność następujących warunków:

1. $x \geqslant 0$,

2. $x = yy^*$ dla pewnego $y \in A$,

3. $x = h^2$ dla pewnego hermitowskiego elementu h.

W następnym zadaniu warto zastosować rachunek funkcyjny, aby otrzymać rozkład elementu C^* algebry na część dodatnią i część ujemną.

Zadanie 12. Niech $T \in B(H)$. Wykazać, że $T \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in H$ mamy $(Tx, x) \geqslant 0$.

Zadanie 13. Wykazać, że w dowolnej C^*-algebrze z jedynką każdy odwracalny element $x \in A$ może być w jednoznaczny sposób przedstawiony w postaci $x = up$, gdzie u jest unitarny, a p dodatni.

Zadanie 14. Sprawdzić, że operator przesunięcia (nieważne, czy w lewo, czy w prawo) nie ma rozkładu biegunowego takiego jak w ostatnim zadaniu.

Zadanie 15 (Fuglede,Putnam,Rosenblum)**.** Załóżmy, że $M, N, T \in B(H)$, M i N są normalne oraz $MT = TN$. Wykaż, że wówczas $M^*T = TN^*$.
Wskazówka: Wziąć dowolne $S \in B(H)$ i sprawdzić, że dla $V = S - S^*$ operator $\exp(V)$ jest unitarny i pracując ambitnie dostać $\|\exp(M^*)T\exp(-N^*)\| \leqslant \|T\|$. Rozważyć funkcję $f(\lambda) = \exp(\lambda M^*)T\exp(-\lambda N^*)$ i pokazać, iż jest całkowita oraz ograniczona.

Zadanie 16. Niech x będzie elementem hermitowskim w C^* algebrze A. Wykazać (proszę korzystać z wiedzy przedstawionej na wykładzie) równoważność następujących warunków:

1. $x \geqslant 0$,
2. $x = yy^*$ dla pewnego $y \in A$,
3. $x = h^2$ dla pewnego hermitowskiego elementu h.

W następnym zadaniu warto zastosować rachunek funkcyjny, aby otrzymać rozkład elementu C^* algebry na część dodatnią i część ujemną.

Zadanie 17. Niech $T \in B(H)$. Wykazać, że $T \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in H$ mamy $(Tx, x) \geqslant 0$.

Zadanie 18. Wywnioskować z twierdzenia z wykładu (o reprezentacji dodatnich funkcjonałów na przemiennych, symetrycznych algebrach Banacha z inwolucją) klasyczne twierdzenie Bochnera. Polecam przeczytać plan postępowania z książki Rudina.

Zadanie 19. Udowodnić, że jeśli F jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na C^* algebrze z jedynką A i $||F|| = F(e) = 1$, to F jest dodatni.
Wskazówki (od Rudina): wziąć $x \in A$, $||x|| < 1$, przyjąć $F(xx^*) = \alpha + \beta i$,

$$y_t = xx^* - (\frac{1}{2} + it)e \text{ dla } t \in \mathbb{R}.$$

Pokazać, że $\sigma(xx^*) \subset [0, 1]$ i stąd

$$|F(y_t)| \leqslant ||y_t|| = r(y_t) \leqslant |\frac{1}{2} + it|.$$

Dalej powinno się kontynuować jak w lemacie 5.26. (tu niestety trzeba wziąć Waltera do ręki).

Zadanie 20. Określmy inwolucję na $A(\mathbb{D})$ za pomocą wzoru

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

1. Czy ta inwolucja czyni z A C^* algebrę?
2. Czy $\sigma(ff^*)$ zawsze leży na osi rzeczywistej?
3. Które funkcjonały liniowo - multiplikatywne na $A(\mathbb{D})$ są dodatnimi funkcjonałami ze względu na tę inwolucję.
4. Jeśli μ jest dodatnią miarą borelowską na $[-1,1]$, to

   $$f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)d\mu(t)$$

   jest funkcjonałem dodatnim na A. Czy istnieją jakieś inne?

Zadanie 21. Niech M będzie zbiorem dodatnich, regularnych miar borelowskich na przestrzeni zwartej K o normie mniejszej bądź równej 1. Uzasadnić, że wszystkimi punktami ekstremalnymi M są delty Diraca oraz miara zerowa.

Zadanie 22. Wykazać, że jeśli μ jest miarą zespoloną na przestrzeni zwartej K taką, że $\|\mu\| = \mu(K)$, to μ jest miarą dodatnią.

W następnym zadaniu warto skorzystać z zadania poprzedzającego.

Zadanie 23. Niech $\mu \in M(\mathbb{T})$ będzie miarą dodatnią. Wykazać, że zbiór $\{n \in \mathbb{Z} : |\widehat{\mu}(n)| = \widehat{\mu}(0)\}$ jest podgrupą $\mathbb{Z}$. Wywnioskować stąd, że jeśli $\mu \in M(\mathbb{T})$ jest probabilistyczną miarą ciągłą, to jej potęgi splotowe zbiegają słabo* do miary Lebesgue'a.