VIII seria zadań: Funkcjonały i ideały

26 kwietnia 2020

Zadanie 1. Znaleźć na algebrze $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ funkcjonał liniowy spełniający założenia twierdzenia Gleasona - Kahana - Żelazki, ale nie będący mulitiplikatywny.

Zadanie 2. Udowodnić, że na algebrze $M_n(\mathbb{C})$ nie istnieją funkcjonały liniowo - multiplikatywne.

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie funkcjonały liniowo - multiplikatywne na algebrze macierzy górnotrójkątnych ustalonego wymiaru.

Zadanie 4. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha bez jedynki i M - ideałem maksymalnym w A. Wykazać, że M jest modularny wtedy i tylko wtedy, gdy M ma kowymiar jeden oraz nie zawiera A^2 (ten ostatni symbol oznacza przestrzeń liniową rozpiętą przez wszystkie iloczyny dwóch elementów z A).

Zadanie 5. Niech $1 \leqslant p < \infty$. Znaleźć wszystkie maksymalne ideały modularne w algebrze $l^p(\mathbb{N})$ (mnożenie punktowe). Udowodnić, że istnieją w tej algebrze ideały maksymalne, które nie są modularne.

Zadanie 6. Rozważmy w algebrze $C^1[0,1]$ $(||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty)$ z mnożeniem punktowym ideał

$$I = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = f'(0) = 0\}.$$

Wykazać, że algebra ilorazowa $C^1[0,1]/I$ jest dwuwymiarową algebrą Banacha o jednowymiarowym radykale.

Zadanie 7. Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha. Wykaż, że albo istnieje $N \in \mathbb{N}$ o własności $x^N = 0$ dla każdego $x \in \mathrm{rad}(A)$, albo istnieją w $\mathrm{rad}(A)$ elementy, które nie są nilpotentne.

Zadanie 8. Niech A i B będą półprostymi, przemiennymi, zespolonymi algebrami Banacha z jedynką oraz niech $\phi : A \mapsto B$ będzie surjektywnym odwzorowaniem liniowym. Wykaż, że ϕ jest izomorfizmem pomiędzy A i B wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_B(\phi(x)) = \sigma_A(x)$ dla wszystkich $x \in A$.

Zadanie 9. Wykaż, że każdy maksymalny ideał modularny, w dowolnej przemiennej algebrze A, jest pierwszy ($xy \in M \to x \in M$ lub $y \in M$).