X seria zadań: Algebry skończeniegenerowane

28 grudnia 2015

Zadanie 1. Niech K będzie układem generatorów zespolonej algebry Banacha A. Wykaż, że zbiory

$$V = V(\varphi_0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathfrak{M}(A) : |\widehat{x}_i(\varphi) - \widehat{x}_i(\varphi_0)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ stanowią bazę otoczeń w $\mathfrak{M}(A)$.

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli przemienna, zespolona algebra Banacha z jedynką ma n generatorów, to przestrzeń $\mathfrak{M}(A)$ jest homeomorficzna z pewnym zwartym podzbiorem $\mathbb{C}^n$.

Definicja 1. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$. Określamy spektrum łączne elementów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jako zbiór

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \{(\widehat{x_1}(\varphi), \ldots, \widehat{x_n}(\varphi)) \in \mathbb{C}^n : \varphi \in \mathfrak{M}(A)\}.$$

Widzimy (mam nadzieję), że widmo łączne jest zwartym podzbiorem $\mathbb{C}^n$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że każdy zwarty podzbiór $\mathbb{C}^n$ jest spektrum łącznym pewnego układu elementów pewnej algebry Banacha.

Czas na klasyczną definicję z analizy zespolonej.

Definicja 2. Niech K będzie niepustym podzbiorem ograniczonym przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Wielomianowo - wypukłą powłoką (otoczką) zbioru K nazywamy zbiór

$$\widehat{K} = \bigcap_W \{\lambda \in \mathbb{C}^n : |W(\lambda)| \leqslant \max_{\mu \in K} |W(\mu)|\},$$

gdzie przecięcie bierze się po zbiorze wszystkich wielomianów W o współczynnikach zespolonych. Podzbiór $K \subset \mathbb{C}^n$ nazywa się wielomianowo - wypukły, jeżeli zachodzi $K = \widehat{K}$.

Zadanie 4. Sprawdzić, że $K \subset \widehat{K}$ oraz $\widehat{K}$ jest również zbiorem zwartym. Uzasadnić ponadto następujący wzór na $\widehat{K}$:

$$\widehat{K} = \bigcap_{W : \max_{\mu \in K} |W(\mu)| = 1} \{\lambda \in \mathbb{C}^n : |W(\lambda)| \leqslant 1\}.$$

Zadanie 5. Niech $K \subset \mathbb{C}^n$ będzie zwarty. Wykazać, że $\mathfrak{M}(P(K)) = \widehat{K}$.

Następne zadanie można zrobić bezpośrednio lub skorzystać z już posiadanej wiedzy.

Zadanie 6. Scharakteryzować wielomianowo - wypukłe podzbiory $\mathbb{C}$.

Kolejne zadanie jest bardzo ważne i wyjaśnia rolę, jaką pełnią zbiory wielomianowo - wypukłe w teorii algebr Banacha.

Zadanie 7. Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha z jedynką. Wykazać, że jeżeli A ma skończony układ generatorów $x_1, \ldots, x_n$, to widmo łączne tego układu generatorów jest wielomianowo - wypukłe. Udowodnić także twierdzenie odwrotne: każdy wielomianowo - wypukły podzbiór $\mathbb{C}^n$ jest widmem łącznym pewnego układu n generatorów pewnej przemienne, zespolonej algebry Banacha z jedynką.
Wskazówki: Z pierwszym zadaniem spróbujcie poradzić sobie sami. W drugą stronę należy wziąć uzupełnienie w normie supremum algebry wielomianów n zmiennych.

Zadanie 8. Sprawdzić, że każdy zwarty i wypukły podzbiór $\mathbb{C}^n$ jest wielomianowo - wypukły.

Podobnie jak to zrobiliśmy na ćwiczeniach można wykazać, że jeśli $K \subset \mathbb{C}^n$ jest wielomianowo - wypukły, to $\mathbb{C}^n \setminus K$ jest spójne. Przeciwna implikacja nie zachodzi, a przykład jest w następnym zadaniu.

Zadanie 9. Dla $n \geqslant 2$ zdefiniujmy zbiór

$$K = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| = 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Wykazać, że $\mathbb{C}^n \setminus K$ jest spójne, ale K nie jest wielomianowo - wypukły.

Zadanie 10. Wykazać, że dwuwymiarowy torus

$$T = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = |w| = 1\}$$

ma w $\mathbb{C}^2$ wielomianową otoczkę wypukłą równą czterowymiarowemu bicylindrowi $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

Definicja 3. Wymierną otoczką wypukłą zbioru ograniczonego $K \subset \mathbb{C}^n$ $(\widehat{K}_r)$ nazywamy zbiór tych $z \in \mathbb{C}^n$ spełniających $|f(z)| \leqslant ||f||_K$ dla wszystkich funkcji wymiernych f, które są analityczne na K. Zbiór ograniczony $K \subset \mathbb{C}^n$ nazywa sie wymiernie wypukły, gdy jest równy swojej wymiernej otoczce wypukłej.

Zadanie 11. Sprawdzić, że $X \subset \widehat{X}_r \subset \widehat{X}$, w szczególności, jeśli X jest wielomianowo wypukły, to jest wymiernie wypukły. Wykazać również, że każdy zwarty podzbiór $\mathbb{C}$ jest wymiernie wypukły.

Następne zadanie łączy pojęcie wymiernej wypukłości z wielomianami.

Zadanie 12. Niech X będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{C}^n$. Wykazać, że

$$\widehat{X}_r = \{z \in \mathbb{C}^n : p(z) \in p(X) \text{ dla każdego wielomianu } p\}.$$

Zadanie 13. Niech X będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{C}^n$. Udowodnić, że $\mathfrak{M}(R(X)) = \widehat{X}_r$.

Zadanie 14. Niech X będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{C}^n$. Uzasadnić, że $P(X) = R(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\widehat{X} = \widehat{X}_r$. Wywnioskować stąd, iż dla zwartego $X \subset \mathbb{C}$, $P(X) = R(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{C} \setminus X$ jest spójne.