IX seria zadań: Transformacja Gelfanda i rachunek funkcyjny

14 maja 2020

Zadanie 1. Niech A i B będą przemiennymi, zespolonymi algebrami Banacha. Sprawdzić, że jeśli algebry A i B są izomorficzne (algebraicznie), to ich przestrzenie Gelfanda są homeomorficzne. Zauważyć również, że gdy $A = C_0(X)$, $B = C_0(Y)$, gdzie X, Y to przestrzenie lokalnie zwarte, to tę implikację można odwrócić.

Każdy domknięty ideał w algebrze Banacha możemy traktować jako domkniętą podalgebrę, więc warto zastanowić się, jakie są związki pomiędzy jej przestrzenią Gelfanda, a przestrzenią Gelfanda algebry wyjściowej.

Definicja 1. Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha. Dla podzbioru $M \subset A$ definiujemy $h(M)$ - otoczkę M jako

$$h(M) = \{\varphi \in \mathfrak{M}(A) : \varphi(M) = \{0\}\}.$$

Zadanie 2. Niech I będzie domkniętym ideałem w przemiennej, zespolonej algebrze Banacha A oraz niech $q : A \mapsto A/I$ będzie odwzorowaniem ilorazowym. Udowodnić, że

1. Odwzorowanie $\varphi \mapsto \varphi \circ q$ jest homeomorfizmem $\mathfrak{M}(A/I)$ na $h(I)$.
2. Odwzorowanie $\varphi \mapsto \varphi|_I$ jest homeomorfizmem $\mathfrak{M}(A) \setminus h(I)$ na $\mathfrak{M}(I)$.

Zadanie 3. Niech A i B będą przemiennymi algebrami Banacha oraz $h : A \mapsto B$ homomorfizmem o gęstym obrazie. Udowodnić, że odwzorowanie $h^* : \mathfrak{M}(B) \mapsto \mathfrak{M}(A)$ określone wzorem

$$h^*(\varphi)(a) = \varphi(h(a)) \text{ dla } a \in A \text{ oraz } \varphi \in \mathfrak{M}(B)$$

jest ciągłe. Uzasadnić również, iż jeśli B ma jedynkę, to h^* przekształca $\mathfrak{M}(B)$ homeomorficznie na $h^*(\mathfrak{M}(B))$.

Zadanie 4. Znaleźć przykład półprostych, przemiennych, zespolonych algebr Banacha A i B oraz homomorfizmu $h : A \mapsto B$ o gęstym obrazie takiego, że odpowiadające mu odwzorowanie $h^* : \mathfrak{M}(B) \mapsto \mathfrak{M}(A)$ nie jest surjektywne.

Zadanie 5. Niech X, Y będą niepustymi przestrzeniami zwartymi, $\phi : C(X) \mapsto C(Y)$ homomorfizmem zachowującym jedynkę i niech $\phi^* : \mathfrak{M}(C(Y)) \mapsto \mathfrak{M}(C(X))$ odwzorowaniem $\varphi \mapsto \varphi \circ \phi$. Sprawdzić, że

1. ϕ^* jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ jest surjektywne.

2. ϕ^* jest surjektywne wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ jest różnowartościowe.

Zadanie 6. Niech A, B będą przemiennymi, zespolonymi algebrami Banacha i niech $A \oplus B$ oznacza ich sumę prostą z normą $||(a, b)|| = \max(||a||, ||b||)$. Wykaż, że istnieje kanoniczny homeomorfizm pomiędzy $\mathfrak{M}(A \oplus B)$ i topologiczną sumą rozłączną $\mathfrak{M}(A)$ i $\mathfrak{M}(B)$.

Zadanie 7. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką. Wykazać, że jeśli istnieją nietrywialne domknięte ideały I_1, I_2 o własności $A = I_1 \oplus I_2$, to $\mathfrak{M}(A)$ nie jest spójne.

Zadanie 8. Niech A będzie półprostą, przemienną, zespoloną algebrą Banacha oraz niech $\phi : \mathfrak{M}(A) \mapsto \mathfrak{M}(A)$ niech będzie homeomorfizmem. Powiemy, że ϕ jest indukowane przez homomorfizm $h : A \mapsto A$, gdy $\phi(\varphi)(x) = \varphi(h(x))$ dla każdego $x \in A$ oraz $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$.

1. Udowodnić, że ϕ jest indukowane przez homomorfizm $h : A \mapsto A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \widehat{A}$ pociąga za sobą $f \circ \phi \in \widehat{A}$.

2. Znaleźć analogiczny warunek gwarantujący, że ϕ jest indukowane przez automorfizm A.

Zadanie 9. W poprzednim zadaniu połóżmy $A = l^1(\mathbb{Z})$. Wykazać, że homeomorfizm $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ jest indukowany przez homomorfizm $A \to A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi \in \widehat{A}$.

Używając rachunku funkcyjnego możemy już zrobić zadanie, nad którym niegdyś mieliśmy się zastanowić.

Zadanie 10. Znaleźć jądro odwzorowania wykładniczego $\exp : A \mapsto G(A)$.

Zadanie 11. Wykazać, że jeżeli funkcja holomorficzna g w jednostkowym kole otwartym i ciągła w kole domkniętym dana jest wzorem

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \text{ gdzie } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

oraz f jest funkcją holomorficzną w otoczeniu zbioru wartości g, to $f \circ g$ rozwija się w szereg

$$(f \circ g)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \text{ gdzie } \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Zadanie 12. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką. Znaleźć przestrzeń i transformację Gelfanda algebry $\widetilde{A}$ składającej się z szeregów postaci

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \text{ gdzie } a_n \in A \text{ oraz } t \in [0,1].$$

Mnożenie jest punktowe, a norma określona jest wzorem $\|\widetilde{x}\| = \sum \|a_n\|$.

Zadanie 13. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha i niech $D : A \to A$ będzie ciągłym różniczkowaniem, czyli ciągłym odwzorowaniem liniowym, które spełnia $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ dla $a, b \in A$. Udowodnić, że $Dx \in \mathrm{rad}(A)$ dla każdego $x \in A$, a więc w szczególności na półprostych algebrach nie ma nietrywialnych ciągłych różniczkowań. Wskazówka: ustalić $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ i rozważyć funkcję $z \to \varphi(\exp(zD)x)$.

Zadanie 14. Udowodnić, że na algebrze $C^\infty[0,1]$ nie istnieje podmultiplikatywna norma zupełna. Wskazówka: założyć przeciwnie i w oparciu o wykład udowodnić, że różniczkowanie w tej normie byłoby ciągłe, co prowadzi do sprzeczności.