XIII seria zadań: Algebry jednostajne

28 grudnia 2015

Definicja 1. Niech X będzie przestrzenią zwartą. Domkniętą podalgebrę $A \subset C(X)$ nazywamy *algebrą jednostajną*, gdy A rodziela punkty X i zawiera funkcje stałe.

Zauważmy, że jeśli A jest algebrą jednostajną na X, to odwzorowanie $\phi : x \mapsto \varphi_x$, gdzie $\varphi_x(f) = f(x)$ dla $f \in A$ jest homeomorfizmem na obraz $\phi(X) \subset \mathfrak{M}(A)$. Przypominam, że dla zwartego podzbioru $K \subset \mathbb{C}$ algebra $P(K)$ to domknięcie wielomianów na K w normie nieskończoność, a $R(K)$ to domknięcie w normie nieskończoność funkcji wymiernych z biegunami poza K, zaś $A(K)$ to algebra funkcji ciągłych na K, które są analityczne na $\mathrm{Int}(K)$. W zagadnieniach związanych z tymi algebrami występują słynne patologie.

Zadanie 1 (Ser szwajcarski)**.** Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem zwartym, które powstaje z domkniętego koła jednostkowego poprzez wyjęcie przeliczalnego układu kółeczek B_j o rozłącznych domknięciach w ten sposób, że $K := \mathbb{D} \setminus (\bigcup B_j)$ nie ma wnętrza. Udowodnić, że $R(K) \neq A(K) = C(K)$.

Zadanie 2. Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zwarty. Wykazać, że $\mathfrak{M}(R(K)) = K$ oraz $\partial(R(K)) = \partial K$.

Zadanie 3. Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zwarty. Wykazać, że $\mathfrak{M}(P(K)) = \widehat{K}$ - suma K i ograniczonych składowych dopełnienia K oraz $\partial(P(K)) = \partial\widehat{K}$. Uzasadnić ponadto, iż $P(K) = P(\widehat{K}) = R(\widehat{K})$.

Zajmiemy się teraz algebrą $A(K)$, gdzie $K \subset \mathbb{C}$ jest zwarty. Przypominam, że składa się ona z funkcji analitycznych wewnątrz K i ciągłych na K (norma supremum). Będziemy pracować w nieco większej ogólności - niech S^2 oznacza sferę Riemanna, czyli płaszczyznę zespoloną z dołączonym punktem w nieskończoności. Topologia ma charakter jednopunktowego uzwarcenia $\mathbb{C}$. Ponadto, jest to rozmaitość zespolona i o funkcji f określonej w otoczeniu punktu ∞ mówimy, iż jest holomorficzna, gdy funkcja $z \to f\left(\frac{1}{z}\right)$ jest holomorficzna w punkcie $z = 0$.

Definicja 2. Niech K będzie zwartym podzbiorem S^2 i niech U będzie otwartym podzbiorem S^2 zawartym K. Przez $A(K, U)$ będziemy oznaczać algebrę funkcji ciągłych na K, które są analityczne na U.

Zadanie 4. Zauważyć, że jeśli $K = S^2$, to $A(K,U)$ może nie rozdzielać punktów K. Uzasadnić jednak, że jeśli $A(K,U)$ zawiera co najmniej jedną funkcję niestałą, to zawiera trzy funkcje, które rozdzielają punkty K. Dowieść również, iż jeśli dopełnienie U w S^2 ma dodatnią miarę, to $A(K,U)$ zawiera funkcję niestałą, a więc rozdziela punkty K.

Definicja 3. Będziemy rozważać całki postaci

$$G(\xi) = \frac{1}{\pi} \int\int \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} h(z) dxdy.$$

dla funkcji ciągłych f na S^2 i borelowskich ograniczonych funkcji h na płaszczyźnie zespolonej o zwartym nośniku.

Zadanie 5. Sprawdzić, że G jest funkcją ciągłą na S^2 i analityczną w ∞, jeśli f jest analityczna w ∞. Ponadto, wykazać że G jest analityczna w każdym punkcie, w którym f jest.

Będziemy interesować się szczególnie całką G, gdy $h = \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}$, gdzie g jest funkcją różniczkowalną w sposób ciągły o zwartym nośniku.

Zadanie 6. Uzasadnić, że w tej sytuacji

$$G(\xi) = \frac{1}{\pi} \int\int \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} dxdy = f(\xi) g(\xi) + \frac{1}{\pi} \int\int f(z) \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z - \xi} dxdy.$$

Przyglądając się temu wzorowi uzasadnić analityczność G poza domkniętym nośnikiem g oraz, iż $f - G$ jest analityczna we wnętrzu zbioru, na którym g przyjmuje wartość 1. Dowieść również, iż jeśli f jest różniczkowalna w sposób ciągły, to

$$G(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int\int \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{g(z)}{z - \xi} dxdy.$$

Zadanie 7. Niech $f \in C(S^2)$ oraz niech g będzie różniczkowalna w sposób ciągły o zwartym nośniku w kole $B(z_0; \delta)$. Wykazać, że

$$\|G\|_{C(S^2)} \leqslant 4\delta \left\| \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \right\|_\infty \sup_{|z - z_0| < \delta} |f(z) - f(z_0)|.$$

Wskazówka: Tak naprawdę wystarczy zobaczyć, że całka

$$\int\int_{B(z_0;\delta)} \frac{dxdy}{|z - \xi|}$$

jest zmaksymalizowana, gdy $\xi = z_0$ i wartość ta jest w tym punkcie równa $2\pi\delta$.

Zadanie 8. Niech f będzie funkcją ciągłą na sferze Riemanna, która jest analityczna na otwartym podzbiorze $U \subset S^2$ i niech $z_0 \in S^2$. Wykazać, że istnieje ciąg funkcji ciągłych $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ na S^2, które są analityczne na U i analityczne w otoczeniu z_0 o własności $f_n \rightrightarrows f$ (zbieżność jednostajna) na S^2.

Wskazówka: Założyć, że $z_0 = 0$ i wybrać ciąg funkcji $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły takich, że $g_n(z) = 0$, gdy $|z| \geqslant \frac{2}{n}$, $g_n(z) = 1$ dla $|z| \leqslant \frac{1}{n}$ o $\left|\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right| \leqslant 2n$. Rozważyć

$$G_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int \int \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} \frac{\partial g_n}{\partial \bar{z}} dxdy$$

i udowodnić, że ciąg $f_n := f - G_n$ działa.

Zadanie 9 (Twierdzenie Arensa)**.** Niech U będzie otwartym podzbiorem S^2 i niech K będzie zwartym podzbiorem S^2 zawierającym U i załóżmy, iż $A(K, U)$ zawiera funkcję niestałą. Udowodnić, że przestrzenią ideałów maksymalnych $A(K, U)$ jest K.
Wskazówka: Założyć, że $\infty \in U$i wziąć $\varphi \in \mathfrak{M}(A(K, U))$, które nie jest ewaluacją w punkcie ∞. Wybrać $g \in A(K, U)$ spełniające $g(\infty) = 0$ i $\varphi(g) = 1$. Wówczas $zg \in A(K, U)$. Położyć $z_0 = \varphi(zg)$. Wziąc teraz dowolne $f \in A(K, U)$ i rozszerzyć do funkcji ciągłej na S^2, a następnie, w oparciu o poprzednie zadanie rozważyć ciąg $f_n \in A(K, U)$, która rozszerza f analitycznie w otoczeniu z_0 i $f_n \rightrightarrows f$ na K. Za pomocą algebraicznych manipulacji zakończyć dowód.