XIV seria zadań: Brzeg Szyłowa

28 grudnia 2015

Zadanie 1. Wykazać, że $\partial(A(\mathbb{D})) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Zadanie 2. Niech A będzie domkniętą podalgebrą z jedynką w $C(\mathbb{D})$ generowaną przez funkcje z i $|z|$. Wykazać, że $\partial(A) = \mathbb{D}$, ale $\mathfrak{M}(A) \neq \mathbb{D}$ (tutaj $\mathbb{D}$ oznacza domknięte koło jednostkowe).

Zadanie 3. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką generowaną przez a. Wykaż, że homeomomorfizm $\varphi \mapsto \varphi(a)$ pomiędzy $\mathfrak{M}(A)$ i $\sigma_A(a)$ przeprowadza $\partial(A)$ na topologiczny brzeg $\sigma_A(a)$.

Zadanie 4. Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha bez jedynki. Wykazać, że $\partial(A_e) = \partial(A) \cup \{\varphi_\infty\}$.

Zadanie 5. Niech I będzie domkniętym ideałem w zespolonej, przemiennej algebrze Banacha A. Jak wykazaliśmy można identyfikować $\mathfrak{M}(I)$ z $\mathfrak{M}(A) \setminus h(I)$. Spróbować wykazać, że wówczas $\partial(I) = \partial(A) \cap \mathfrak{M}(I)$. Być może potrzebna jest wskazówka, ale spróbujcie na razie sami (jak ktoś bardzo jej pragnie, to niech zajrzy do żółtej książki).

Zadanie 6. Niech I będzie domkniętym ideałem w przemiennej, zespolonej algebrze Banacha A. W ogólności, nie ma żadnych relacji pomiędzy $\partial(A/I)$ i $\partial(A) \cap h(I)$. Aby sobie to uzmysłowić spróbujcie znaleźć przykład przemiennej zespolonej algebry Banacha A z jedynką oraz domkniętego ideału I takiego, że $\partial(A) \cap h(I) = \emptyset$.

Zadanie 7. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha i niech $\varphi \in \partial(A)$. Załóżmy, że φ jest punktem izolowanym $\partial(A)$. Wykaż, że φ jest punktem izolowanym $\mathfrak{M}(A)$ (być może przyda się zadanie przedpoprzednie).

Zadanie 8. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha i niech $\mathrm{cor}(A)$ będzie zbiorem wszystkich funkcjonałów liniowo - multiplikatywnych na A, które rozszerzają się do dowolnej nadalgebry B zawierającej A jako domkniętą podalgebrę. Jak wiemy z wykładu $\partial(A) \subset \mathrm{cor}(A)$. Wykazać, że $\mathrm{cor}(A)$ jest domkniętym podzbiorem $\mathfrak{M}(A)$.

Omówimy teraz zastosowanie topologicznych dzielników zera do zagadnień związanych z brzegiem Szyłowa (to dopiero początek)!
Do pierwszego zadania przyda się przypomnieć sobie charakteryzację topologicznych dzielników zera.

Zadanie 9. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką i niech $\varphi \in \partial(A)$. Wykazać, że każde $x \in \ker\varphi$ jest topologicznym dzielnikiem zera.

Pojęcie topologicznego dzielnika zera łatwo uogólnić na układy elementów.

Definicja 1. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką. Dla skończonego układu elementów $x_1, \ldots, x_n \in A$ określamy funkcję

$$d(x_1, \ldots, x_n) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} \|x_j y\| : \; y \in A, \; \|y\| = 1 \right\}.$$

Powiemy, że zbiór $S \subset A$ składa się z łącznych topologicznych dzielników zera, gdy $d(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dla dowolnego skończonego układu elementów $x_1, \ldots, x_n \in S$.

W następnym zadaniu należy naśladować dowód z wykładu.

Zadanie 10. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką i niech $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$. Załóżmy, że $\ker\varphi$ składa się z łącznych topologicznych dzielników zera. Wykazać, że jeśli B jest dowolną nadalgebrą A zawierającą A jako domkniętą podalegbrę, to φ rozszerza się do elementu z $\mathfrak{M}(B)$.

Zadanie 11. Niech X będzie przestrzenią zwartą i niech A będzie algebrą jednostajną na A. Wówczas $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ należy do $\partial(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker\varphi$ składa się z łącznych topologicznych dzielników zera.

Wskazówka: Zauważyć, że $\varphi = \varphi_x$ dla $x \in X$. Biorąc $f_1, \ldots, f_n \in \ker\varphi$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dobrać otoczenie V punktu x tak, aby $|f_j(y)| < \varepsilon$ dla $y \in V$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Skorzystać z własności funkcjonałów z brzegu Szyłowa i znaleźć $g \in A$ o własności $1 = \|g\|_\infty > \|g|_{X \setminus V}\|_\infty$. Podnieść g do odpowiedniej potęgi i zakończyć dowód tej implikacji.
W drugą stronę, rozważyć izometryczny izomorfizm (na obraz) $\phi(f) = f|_{\partial(A)}$ z A do $C(\partial(A))$. Dalej, pokombinować ze złożeniem $\varphi \circ \phi^{-1} \in \mathfrak{M}(\phi(A))$ i zakończyć rozwiązanie w oparciu o zadanie poprzednie.

Zadanie 12. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką i niech $\varphi \in \partial(A)$. Wykazać, że $\ker\varphi$ składa się z łącznych topologicznych dzielników zera.

Wskazówka: Wystarczy pokazać, że dla danych $a_1, \ldots, a_q \in A$ spełniających $d(a_1, \ldots, a_q) \geqslant 1$ nie istnieje ideał maksymalny w A zawierający te elementy i odpowiadający punktowi z $\partial(A)$. Pierwszym zadaniem jest wykazanie nierówności

$$\underset{y \in A}{\forall} \sum_{j=1}^{q} r(a_j y) \geqslant r(y). \tag{1}$$

Rozważyć algebrę B szeregów bezwzględnie zmiennych q zmiennych

$$\widetilde{x}(t_1, \ldots, t_q) = \sum x_{n_1, \ldots, n_q} t^{n_1} \cdot \ldots t_q^{n_q}, \text{ gdzie } x_{n_1, \ldots, n_q} \in A$$

z mnożeniem punktowym i normą równą sumie norm współczynników. Dalej, mamy zanurzenie $\phi : x \mapsto \widetilde{x}(t_1, \dots, t_q) = x$ algebry A w algebrę B i za jego pomocą identyfikować A z $\phi(A)$. Wziąć element

$$z = \sum_{j=1}^{q} a_j t_j \in B$$

i wykazać indukcyjnie, że $\|z^k y\| \geqslant \|y\|$ dla $y \in A$, $k \in \mathbb{N}$. Wywnioskować stąd $r(zy) \geqslant r(y)$ dla $y \in A$ i kontynuując uzasadnić nierówność 1. Przeformułować tę nierówność, aby otrzymać $d(\widehat{a_1}, \dots, \widehat{a_q}) \geqslant 1$. Niech C będzie domknięciem $\Gamma(A)$ w $C(\mathfrak{M}(A))$. Z poprzedniego zadania dostać, iż funkcje $\widehat{a_1}, \dots, \widehat{a_q}$ nie mogą jednocześnie należeć do $\ker\psi$ dla dowolnych $\psi \in \partial(C)$, co pozwala korzystając z odpowiednich kanonicznych utożsamień zakończyć dowód.

Zadanie 13. Niech A będzie przemienną algebrą unormowaną i niech M będzie podzbiorem A składającym się z łącznych topologicznych dzielników zera. Wówczas domknięty ideał generowany przez M w A również składa się z łącznych topologicznych dzielników zera.

Zadanie 14. Niech B będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką e i niech A będzie domkniętą podalgebrą B z jedynką. Wówczas każde $\varphi \in \partial(A)$ rozszerza się do elementu $\widetilde{\varphi} \in \partial(B)$.

Wskazówka: Niech C_A, C_B będą domknięciami obrazu transformacji Gelfanda alegbr A i B. Dla $\varphi \in \partial(A)$ określmy $\widehat{\varphi} : \Gamma(A) \to \mathbb{C}$ wzorem $\widehat{\varphi}(\widehat{x}) = \varphi(x)$ dla $x \in A$. Z wykładu wiadomo, że istnieje $\psi \in \mathfrak{M}(B)$ spełniające $\psi|_A = \varphi$. Sprawdzić, że $\widehat{\varphi}$ rozszerza się jednoznacznie do pewnego $\phi(\varphi) \in \mathfrak{M}(C_A)$. Dalej, odwzorowanie $\phi : \varphi \to \phi(\varphi)$ jest włożeniem $\partial(A)$ w $\mathfrak{M}(C_A)$. Sprawdzić, że $\phi(\partial(A)) = \partial(C_A)$. Zakończyć dowód w oparciu o poprzednie zadania.