Skrypt do Algebr Banacha

Przemysław Ohrysko

7 czerwca 2020

Spis treści

Rozdział 1

Ogólna teoria algebr Banacha

W czterech podrozdziałach omówimy kolejno podstawowe dla teorii algebr Banacha pojęcia takie jak spektrum, czy promień spektralny. Badamy również szczegółowo strukturę grupy elementów odwracalnych, które mogą stanowić początek głębszych rozważań związanych z kohomologiami algebr Banacha.

1.1 Podstawowe definicje i przykłady

Niniejszy podrozdział ma charakter wprowadzający - podajemy w nim podstawowe definicje i procedury, takie jak dołączanie jedynki, czy wkładanie dowolnej algebry Banacha w algebrę operatorów (Twierdzenie 1.1.7). W szczególności uzasadniamy równoważność dwóch podejść do pojęcia algebry Banacha (zobacz Twierdzenie 1.1.5). Podrozdział kończy omówienie podstawowych przykładów (Przykład 1.1.8).

Wprowadzimy najpierw podstawowy dla naszych rozważań obiekt algebraiczny.

Definicja 1.1.1. Algebrą A nad ciałem K (K - algebrą) nazywamy przestrzeń liniową nad K z mnożeniem łącznym elementów z A, przemiennym z mnożeniem przez skalary z K, spełniającym dodatkowo dla wszystkich $x, y, z \in A$ następujące prawa rozdzielności

$$\underset{x,y,z\in A}{\forall} (x+y)z = xz + yz$$

$$\underset{x,y,z\in A}{\forall} z(x+y) = zx + zy.$$

Ponadto, jeśli A zawiera element neutralny dla tego mnożenia, to nazywamy go jedynką i oznaczamy przez e, a samą algebrę A nazywamy algebrą z jedynką.

Jeżeli mnożenie elementów z A jest przemienne, to algebrę A nazywamy przemienną.
Stosownie do ciała współczynników algebrę nazywamy rzeczywistą lub zespoloną.

Badaniem struktury z Definicji 1.1.1 zajmuje się algebra, dla nas jednak potrzebna jest dodatkowa struktura normowa. Będziemy od tej pory zakładać, że $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definicja 1.1.2. Niech A będzie algebrą. Jeśli A ma dodatkowo strukturę przestrzeni Banacha $(A, ||\cdot||)$ z normą podmultiplikatywną, czyli spełniającą nierówność

$$\underset{x,y\in A}{\forall} ||xy|| \leqslant ||x|| \cdot ||y||,$$

to A nazywamy algebrą Banacha. Ponadto, gdy A ma jedynkę o normie 1, to A nazywamy algebrą Banacha z jedynką.

Niektórzy autorzy (na przykład profesor Wiesław Żelazko) przyjmują inną definicję algebry Banacha.

Definicja 1.1.3. Niech A będzie algebrą i jednocześnie przestrzenią unormowaną $(A, ||\cdot||)$. Powiemy, że mnożenie w A jest ciągłe względem każdej ze zmiennych z osobna, gdy dla dowolnego, ustalonego $x \in A$ oraz ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżnego do y (w normie $||\cdot||$) zachodzi

$$xy_n \to xy \text{ oraz } y_n x \to yx \text{ (w normie } ||\cdot||).$$

Mnożenie w A jest ciągłe względem obu zmiennych jednocześnie, jeśli dla dowolnych ciągów $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżnych do x oraz y (odpowiednio) zachodzi

$$x_n y_n \to xy.$$

Tak więc profesor Żelazko w swojej książce nazywa algebrą Banacha algebrę zupełną, w której mnożenie jest ciągłe względem każdej ze zmiennych z osobna. Taka definicja wydaje się ogólniejsza, lecz zobaczymy, że w istocie (z dokładnością do równoważności norm) niewiele się ona od użytej przez nas różni.
Opiszemy jednak najpierw proces *dołączania jedynki* do algebry Banacha.

Definicja 1.1.4. Niech A będzie algebrą Banacha nad K. Rozważamy algebrę $A_e = A \oplus K = A \times K$ (suma prosta przestrzeni liniowych) z mnożeniem zdefiniowanym wzorem (przez e oznaczamy jedynkę ciała K)

$$\underset{\lambda_1,\lambda_2\in K}{\forall} \; \underset{x,y\in A}{\forall} (x+\lambda_1 e)(y+\lambda_2 e) = xy + \lambda_2 x + \lambda_1 y + \lambda_1\lambda_2 e.$$

W ten sposób A_e staje się algebrą z jedynką e. Ponadto, gdy zdefiniujemy normę na A_e wzorem

$$\underset{x\in A}{\forall} \; \underset{\lambda\in K}{\forall} ||x+\lambda e|| := ||x|| + |\lambda| \text{ (po prawej stronie norma elementu } x \text{ w } A),$$

to otrzymamy na A_e strukturę algebry Banacha z jedynką.

Istnieje kanoniczne zanurzenie (homomorfizm) $\varphi : A \mapsto A_e$ zadany wzorem $\varphi(x) = x + 0$, przy którym algebra A przechodzi w sposób ciągły na domkniętą podalgebrę A_e (a nawet dwustronny ideał kowymiaru 1). W ten sposób nasze rozszerzenie jest "minimalne" i w związku z tym wiele własności algebr bez jedynki można wnioskować z badania ich wersji z dołączoną jedynką.
Teraz, gdy umiemy dołączać jedynkę do algebry Banacha czas na dowód równoważności "naszej" definicji algebry Banacha z definicją "według" profesora Żelazki.

Twierdzenie 1.1.5. *Niech A będzie algebrą zupełną z normą $||\cdot||$, w której mnożenie jest ciągłe względem każdej ze zmiennych z osobna. Wówczas na A istnieje norma $||\cdot||_0$ równoważna z normą wyjściową, w której A jest algebrą Banacha (to znaczy, że norma $||\cdot||_0$ jest podmulitplikatywna).*

Dowód. Jeśli algebra A nie ma jedynki, to należy ją dołączyć tak, jak zostało to opisane w Definicji 1.1.4, a następnie pracować dalej z algebrą A_e (wystarczy zauważyć, że ciągłość mnożenia jest zachowana). Aby uniknąć niepotrzebnych komplikacji główną część dowodu przeprowadzimy przy założeniu, iż A ma jedynkę. Weźmy $x \in A$ i oznaczmy przez $L_x : A \mapsto A$ operator lewostronnego mnożenia przez x, czyli $L_x(y) = xy$ dla $y \in A$. Ciągłość mnożenia po drugiej zmiennej implikuje, że każdy operator L_x jest ciągły. Automatyczne sprawdzenie uzasadnia, iż przekształcenie $F : A \mapsto B(A)$ zadane wzorem $F(x) = L_x$ jest homomorfizmem algebr. Ponadto, L_x jest operatorem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$, co sprawdzamy dzięki istnieniu jedynki $L_x(e) = x$, a więc F jest izomorfizmem (na obraz). Przyjmijmy dla $x \in A$

$$||x||_0 = ||L_x||_{B(A)} = \sup_{||y||\leqslant 1} ||xy||. \tag{1.1}$$

Ta norma jest podmultiplikatywna, gdyż

$$||xy||_0 = ||L_{xy}||_{B(A)} = ||L_x \circ L_y||_{B(A)} \leqslant ||L_x||_{B(A)}||L_y||_{B(A)} = ||x||_0||y||_0.$$

Udowodnimy, że norma $||x||_0$ jest zupełna. Niech więc $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w normie $||\cdot||_0$. Z definicji 1.1 mamy

$$||x||_0 \geqslant ||x(||e||^{-1}e)|| = ||e||^{-1}||x||. \tag{1.2}$$

Stąd ciąg x_n jest także ciągiem Cauchy'ego w normie $||\cdot||$, a więc $x_n \to x$ w normie $||\cdot||$ dla pewnego $x \in A$. Z drugiej strony, $(L_{x_n})_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $B(A)$, czyli jest zbieżny do pewnego $T \in B(A)$. Ciągłość mnożenia po pierwszej współrzędnej implikuje jednak $L_{x_n}y \to L_x y$ w normie $||\cdot||$ dla każdego $y \in A$, a więc $T = L_x$, co dowodzi zupełności normy $||\cdot||_0$. W ten sposób określiliśmy na A dwie zupełne normy: $||\cdot||$ oraz $||\cdot||_0$. Nierówność 1.2 może być przepisana w formie $||\cdot|| \leqslant ||e||\cdot||\cdot||_0$, z której wynika porównywalność obu norm. Dowód kończy zastosowanie typowego wniosku z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym (dwie zupełne i porównywalne normy na przestrzeni Banacha są równoważne). $\square$

W algebrach Banacha mnożenie jest oczywiście ciągłe względem każdej ze zmiennych z osobna, a także względem obu zmiennych jednocześnie, co uzasadnia następujący wniosek.

Wniosek 1.1.6. *Niech A będzie algebrą zupełną, w której mnożenie jest ciągłe względem każdej ze zmiennych z osobna. Wówczas jest ono ciągłe względem obu zmiennych jednocześnie.*

W dowodzie Twierdzenia 1.1.5 wykazaliśmy również domkniętość zbioru $F(A)$. W ten sposób możemy każdą algebrę Banacha utożsamić z domkniętą podalgebrą pewnej algebry operatorów na przestrzeni Banacha. Podsumujemy to w następnym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.1.7. *Niech A będzie algebrą Banacha. Istnieje wówczas przestrzeń Banacha X (jest nią A, gdy ma ona jedynkę, zaś A_e w przeciwnym wypadku) taka, że A jest algebrą izomorficzną z pewną domkniętą podalgebrą algebry $B(X)$.*

Czas omówić kilka podstawowych przykładów.

Przykład 1.1.8. Nieprzemienne algebry Banacha:

- $M_n(K)$ - algebra macierzy $n \times n$ z normą operatorową i składaniem operatorów (mnożeniem macierzy) w charakterze mnożenia
- $B(X)$, gdzie X jest przestrzenią Banacha z normą operatorową i składaniem w charakterze mnożenia.

Przemienne algebry Banacha:

- $C(X)$, gdzie X jest przestrzenią zwartą - algebra funkcji ciągłych z mnożeniem punktowym i normą supremum.
- $C_0(X)$, gdzie X jest przestrzenią lokalnie zwartą - algebra tych funkcji $f \in C(X)$ z normą supremum, które spełniają dodatkowy warunek

$$\underset{\varepsilon}{\forall} \underset{K \subset X}{\exists} |f(x)| < \varepsilon \text{ dla } x \notin K, \text{ gdzie } K \text{ jest zwarty.}$$

- $C_B(X)$, gdzie X jest przestrzenią topologiczną - algebra funkcji ciągłych ograniczonych na X z mnożeniem punktowym i normą supremum.
- $A(K)$, gdzie $K \subset \mathbb{C}^n$ jest zwarty - algebra funkcji holomorficznych we wnętrzu K i ciągłych na jego brzegu z mnożeniem punktowym i normą supremum.
- $P(K)$, $R(K)$, gdzie $K \subset \mathbb{C}^n$ jest zwarty - domknięcia w normie supremum wielomianów ($P(K)$) i funkcji wymiernych ($R(K)$) kanonicznego układu współrzędnych w $\mathbb{C}^n$.
- $L^\infty(X)$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ jest mierzalny - algebra funkcji istotnie ograniczonych na X z normą supremum istotnego.

- $L^1(\mathbb{T})$, $L^1(\mathbb{R})$ - algebra funkcji mierzalnych i całkowalnych odpowiednio na $\mathbb{T}$ i $\mathbb{R}$ z normami

$$||f||_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|dt \ ||f||_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$$

i splotem w charakterze mnożenia

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)dt \text{ dla } f, g \in L^1(\mathbb{T}).$$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt \text{ dla } f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

- $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$ - algebra funkcji mierzalnych na $\mathbb{T}$ i całkowalnych z p-tą potęgą unormowanych poprzez

$$||f||_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

ze splotem w charakterze mnożenia.

- $l^1(\mathbb{Z})$ - algebra dwustronnych ciągów sumowalnych z normą

$$||a_n||_{l^1(\mathbb{Z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \text{ dla } a_n \in l^1(\mathbb{Z})$$

i splotem w charakterze mnożenia (tutaj c_n jest ciągiem będącym wynikiem splotu ciągów a_n i b_n).

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}b_k.$$

- $l^1(G)$, gdzie G jest dowolną grupą abelową - algebra funkcji $f : G \mapsto \mathbb{C}$ sumowalnych względem miary liczącej na G z normą

$$||f||_{l^1(G)} = \sum_{x\in G} |f(g)| \text{ dla } f \in l^1(G)$$

i splotem w charakterze mnożenia

$$(f * g)(x) = \sum_{y\in G} f(x-y)g(y) \text{ dla } f, g \in l^1(G)$$

- $A(\mathbb{T})$, $A(\mathbb{Z})$, $A(\mathbb{R})$ - algebry transformat Fouriera funkcji lub ciągów (odpowiednio) na $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$ i $\mathbb{R}$ z mnożeniem punktowym oraz normą przeniesioną z algebry bazowej. Dokładniej,

$$f \in A(\mathbb{T}) \;\Leftrightarrow\; f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \text{ gdzie } a_n \in l^1(\mathbb{Z}),\ ||f||_{A(\mathbb{T})} = ||a_n||_{l^1(\mathbb{Z})}.$$

$$A(\mathbb{Z}) = \{a_n : a_n = \widehat{f}(n) \text{ dla pewnego } f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ oraz } n \in \mathbb{Z}\},$$

$$||a_n||_{A(\mathbb{Z})} = ||f||_{L^1(\mathbb{T})}, \text{ gdzie } f \text{ jest funkcją spełniającą } a_n = \widehat{f}(n) \text{ dla } n \in \mathbb{Z}.$$

$$A(\mathbb{R}) = \{f : f = \widehat{g} \text{ dla pewnego } g \in L^1(\mathbb{R})\},$$

$$||f||_{A(\mathbb{R})} = ||g||_{L^1(\mathbb{R})}, \text{ gdzie } g \text{ jest funkcją taką, że } f = \widehat{g}.$$

Przypominamy, że współczynniki Fouriera oraz transformata Fouriera określone są wzorami

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt \text{ dla } f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ oraz } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\widehat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ixy}dy \text{ dla } g \in L^1(\mathbb{R}) \text{ oraz } x \in \mathbb{R}.$$

- $l^p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p < \infty$ - algebra ciągów sumowalnych z p-tą potęgą i mnożeniem punktowym.
- $l^\infty(\mathbb{Z})$ - algebra ciągów ograniczonych z mnożeniem punktowym i normą supremum.

Na zakończenie tego podrozdziału odnotujmy fakt, który przyda nam się przy dowodzie twierdzenia Wienera.

Fakt 1.1.9. *Następujące algebry Banacha są izometrycznie izomorficzne*

$$A(\mathbb{Z}) \simeq L^1(\mathbb{T}),\ A(\mathbb{T}) \simeq l^1(\mathbb{Z}),\ A(\mathbb{R}) \simeq L^1(\mathbb{R}).$$

Dowód. W każdym przypadku dowód jest bardzo podobny, więc ograniczymy się do drugiego przypadku. Określmy przekształcenie $F : A(\mathbb{T}) \mapsto l^1(\mathbb{Z})$ wzorem

$$F(f) = a_n, \text{ gdzie } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}.$$

Wówczas, z definicji normy w $A(\mathbb{T})$ przekształcenie F jest liniową izometrią. Jest to również oczywiście bijekcja, więc pozostaje sprawdzić multiplikatywność. Niech zatem $f, g \in A(\mathbb{T})$. Wtedy

$$f(t)g(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ikt}\right) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_k e^{i(n+k)t} =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k\right) e^{int}$$

(w przejściu od drugiej do trzeciej linijki przesunęliśmy indeks sumowania z n na $n-k$, a potem zmieniliśmy kolejność sum). To kończy dowód, gdyż w nawiasie rozpoznajemy n - tą współrzędną splotu ciągów a_n i b_n. $\square$

1.2 Grupa elementów odwracalnych

Definicja 1.2.1. Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką. Powiemy, że element $x \in A$ jest odwracalny, gdy istnieje element $y \in A$ spełniający

$$xy = yx = e.$$

Niech $G(A)$ będzie zbiorem elementów odwracalnych algebry A. Z relacji $(x^{-1})^{-1} = x$ oraz $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ dla $x, y \in G(A)$ wynika, że zbiór $G(A)$ jest grupą. Tę grupę będziemy nazywać *grupą elementów odwracalnych.* Podstawowe jej własności zebrane są w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.2.2. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką. Wówczas*

1. *Jeśli $x, y \in G(A)$ spełniają $||y-x|| \leqslant \frac{1}{2}||x^{-1}||^{-1}$, to*
$$||y^{-1} - x^{-1}|| \leqslant 2||x^{-1}||^2||y-x||.$$
W szczególności, odwzorowanie $x \mapsto x^{-1}$ jest homeomorfizmem $G(A)$.
2. *$G(A)$ jest otwartym podzbiorem A i jeśli $x \in A$ jest taki, że $||x-e|| < 1$, to $x \in G(A)$.*

Dowód. Niech x i y będą takie jak w punkcie 1. Mamy

$$||y^{-1}|| - ||x^{-1}|| \leqslant ||y^{-1} - x^{-1}|| = ||y^{-1}(x-y)x^{-1}|| \leqslant \frac{1}{2}||y^{-1}||.$$

Stąd $||y^{-1}|| \leqslant 2||x^{-1}||$, a więc

$$||y^{-1} - x^{-1}|| \leqslant ||y^{-1}|| \cdot ||x-y|| \cdot ||x^{-1}|| \leqslant 2||x^{-1}||^2||y-x||.$$

Zatem bijekcja $x \mapsto x^{-1}$ jest ciągła na $G(A)$, a skoro jest swoją własną odwrotnością, to jest homeomorfizmem.
Niech $x \in A$ będzie takie, że $||e-x|| < 1$. Przyjmijmy $u = e - x$. Wówczas $||u|| < \alpha < 1$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$, co w połączeniu z podmultiplikatywnością normy prowadzi do nierówności $||u^n|| < \alpha^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

jest zbieżny bezwzględnie w A, a więc w szczególności jest zbieżny do pewnego $z \in A$. Teraz

$$zx = z(e-(e-x)) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{n=0}^{\infty} u^{n+1} = e.$$

Analogicznie sprawdzamy, iż $xz = e$, co dowodzi odwracalności elementu x. Aby uzasadnić otwartość zbioru $G(A)$ weźmy dowolny element $x \in G(A)$ oraz $y \in A$ spełniający $||y - x|| < ||x^{-1}||^{-1}$. Wówczas

$$||e - x^{-1}y|| \leqslant ||x^{-1}|| \cdot ||x - y|| < 1,$$

co dzięki poprzedniej części rozumowania prowadzi do $x^{-1}y \in G(A)$ i dalej $y \in G(A)$. To kończy dowód otwartości grupy elementów odwracalnych (dla każdego elementu odwracalnego wskazaliśmy jego otoczenie składające się wyłącznie z elementów odwracalnych). □

W oparciu o punkt 2. Twierdzenia 1.2.2 otrzymamy teraz użyteczny wniosek.

Wniosek 1.2.3. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz $x \in A$ spełnia $||x|| < 1$. Wówczas element $e - x$ jest odwracalny oraz zachodzi oszacowanie*

$$||(e - x)^{-1} - e - x|| \leqslant \frac{||x||^2}{1 - ||x||}$$

Dowód. Pierwsza część tezy wynika wprost z punktu 2. Twierdzenia 1.2.2 i relacji $x = e-(e-x)$. Z dowodu twierdzenia wymienionego przed chwilą uzyskujemy

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

a więc

$$||(e - x)^{-1} - e - x|| = ||\sum_{n=2}^{\infty} x^n|| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} ||x||^n = \frac{||x||^2}{1 - ||x||}.$$

□

Zauważmy, że z pierwszej części Twierdzenia 1.2.2 wynika ciągłość operacji grupowych w $G(A)$ (ciągłość mnożenia wynika z podmultiliplikatywności normy), co wyrazimy krótko w następującym wniosku.

Wniosek 1.2.4. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką. Wówczas $G(A)$ jest grupą topologiczną.*

Zajmiemy się teraz nieco dokładniej strukturą grupy elementów odwracalnych algebry Banacha. Pomocna okaże się w tym celu funkcja wykładnicza.

Definicja 1.2.5. Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką. Dla $x \in A$ określamy funkcję wykładniczą wzorem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Szereg występujący w Definicji 1.2.5 jest zbieżny bezwzględnie dla dowolnego $x \in A$, a ponadto zachodzi nierówność $||\exp(x)|| \leqslant \exp ||x||$. Co więcej, jeśli dwa elementy $x, y \in A$ komutują (to znaczy spełniają równanie $xy = yx$), to

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y), \tag{1.3}$$

co sprawdzamy tak jak dla liczb zespolonych. To, że komutowanie elementów jest istotne można bez trudu sprawdzić na wielu przykładach, więc nie należy się spodziewać, aby w ogólności zbiór $\mathrm{Exp}(A) = \{\exp(x) : x \in A\}$ był grupą. Tym nie mniej ma on silne związki ze strukturą grupy $G(A)$, co zobaczymy później. Na razie odnotujmy, iż z równania 1.3 wynika

$$\exp(-x) \exp(x) = e \text{ dla dowolnego } x \in A,$$

więc $\mathrm{Exp}(A) \subset G(A)$. Wspólnie z funkcją wykładniczą występuje bardzo często funkcja logarytmiczna, więc przyjmiemy stosowną definicję.

Definicja 1.2.6. Logarytmem elementu $x \in A$ będziemy nazywać każde rozwiązanie $y \in A$ równania $\exp(y) = x$.

Wynika stąd, iż zbiór $\mathrm{Exp}(A)$ zbiorowi elementów mających logarytmy. Korzystając z podstawowych rozwinięć w szeregi Taylora uzasadnimy teraz istotne dla dalszych badań stwierdzenie.

Stwierdzenie 1.2.7. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką. Wówczas zbiór $\mathrm{Exp}(A)$ zawiera otwartą kulę jednostkową o środku w e.*

Dowód. Jeśli $x \in A$ spełnia $||x - e|| < 1$, to szereg

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e - x)^m}{m}$$

jest zbieżny bezwzględnie. Zatem szereg podwójny

$$\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e - x)^m}{m} \right)^n$$

można sumować w dowolnej kolejności. Rozpoznajemy bez trudu w definicji elementu y szereg Taylora funkcji logarytmicznej, więc standardowe manipulacje na szeregach muszą doprowadzić do równania $\exp(y) = x$, co kończy dowód. □

Odnotujmy jeszcze jeden lemat techniczny.

Lemat 1.2.8. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz $x \in A$. Wówczas odwzorowanie $t \mapsto \exp(tx)$ jest ciągłym homomorfizmem grupy addytywnej liczb rzeczywistych w $G(A)$.*

Dowód. Z równania funkcyjnego dla funkcji wykładniczej wynika, że odwzorowanie $t \mapsto \exp(tx)$ jest homomorfizmem. Sprawdzimy teraz ciągłość

$$||\exp(sx) - \exp(tx)|| \leqslant ||\exp(sx)|| \cdot ||e - \exp(t-s)x|| \leqslant$$
$$\exp||sx|| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{||(t-s)x||^n}{n!} \leqslant \exp||sx|| \cdot |1 - \exp(|t-s|||x||)|$$

dla dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$, co dowodzi ciągłości. $\square$

Wprowadzimy teraz znaną z teorii grup topologicznych definicję.

Definicja 1.2.9. Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz $G(A)$ jej grupą elementów odwracalnych. Przez G_1 będziemy oznaczać składową spójną zawierającą jedynkę algebry A i nazywać ją będziemy składową główną.

Możemy już udowodnić pierwsze twierdzenie o strukturze grupy elementów odwracalnych algebry Banacha.

Twierdzenie 1.2.10. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką.*

1. *Składowa główna G_1 jest otwartą w A podgrupą generowaną przez zbiór* $\mathrm{Exp}(A)$*. Co więcej, G_1 jest otwarto - domkniętą podgrupą normalną w* $G(A)$*.*

2. *Jeśli A jest przemienna, to* $\mathrm{Exp}(A) = G_1$*.*

3. *Element $x \in G(A)$ należy do* $\mathrm{Exp}(A)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy należy do pewnej spójnej abelowej podgrupy $G(A)$.*

Dowód. Zacznijmy od punktu 1. Niech $\mathcal{E}$ będzie podgrupą generowaną przez $\mathrm{Exp}(A)$. Wówczas $\mathcal{E}$ jest spójna, bo odwzorowanie

$$t \mapsto e^{ta_1} e^{ta_2} \dots e^{ta_n} \text{ dla } t \in [0,1]$$

zadaje łuk łączący dowolny element $e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_n}$ z jedynką algebry A. Stąd $\mathcal{E}$ jest podzbiorem G_1. Pokażemy teraz, że $\mathcal{E}$ jest otwarte w A. W tym celu weźmy $x \in \mathcal{E}$ oraz $y \in A$ spełniające $||x - y|| < ||x^{-1}||^{-1}$. Wówczas

$$||e - x^{-1}y|| \leqslant ||x^{-1}|| \cdot ||x - y|| < 1,$$

a więc ze Stwierdzenia 1.2.7 istnieje $z \in A$ takie, że $x^{-1}y = \exp(z)$. Zatem $y = x\exp(z)$ należy do $\mathcal{E}$, czyli $\mathcal{E}$ jest otwarta w A. Wynika stąd także, że jest ona otwarta w $G(A)$, a więc także jest w $G(A)$ domknięta (to ogólny fakt z teorii grup topologicznych - otwarta podgrupa jest również domknięta, bo jej dopełnienie jest sumą otwartych warstw). Korzystając ze spójności G_1 otrzymujemy $G_1 = \mathcal{E}$. Pozostaje jeszcze wykazać normalność. Niech więc $x \in G(A)$ oraz $y \in A$. Wykonamy prosty rachunek

$$x\exp(y)x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{xy^n x^{-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xyx^{-1})^n}{n!} = \exp(xyx^{-1}),$$

z którego wynika, że zbiór $\mathrm{Exp}(A)$ jest zamknięty na działanie automorfizmami wewnętrznymi, czyli tę własność ma także G_1. Punkt 2. wynika teraz od razu z punktu 1. Dla dowodu ostatniej części twierdzenia zauważmy, iż wykazaliśmy w Lemacie 1.2.8 połowę tego punktu, a mianowicie każdy eksponent należy do pewnej spójnej abelowej podgrupy $G(A)$. Załóżmy teraz, że $x \in A$ należy do pewnej spójnej abelowej podgrupy H grupy $G(A)$. Niech B będzie domkniętą podalgebrą A generowaną przez H. Wówczas x należy do składowej głównej w podalgebrze B i z przemienności w oparciu o punkt 2. otrzymujemy tezę. □

Czas na ostatnie twierdzenie tego podrozdziału.

Twierdzenie 1.2.11 (Lorch)**.** *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką. Wówczas grupa ilorazowa $G(A)/\mathrm{Exp}(A)$ jest beztorsyjna. Zachodzi również dychotomia: albo $G(A)$ jest spójna, albo ma nieskończenie wiele składowych spójności.*

Dowód. Załóżmy, że $x \in A$ spełnia $x^n \in \mathrm{Exp}(A)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $y \in A$ jest elementem spełniającym $x^n = \exp(y)$, to element $z = x\exp(-n^{-1}y)$ czyni zadość tożsamości $z^n = e$. Niech $\lambda \in \mathbb{C}$ będzie taki, że element $\lambda e - z$ nie jest odwracalny. Wówczas równanie

$$(\lambda^n - 1)e = \lambda^n e - z^n = (\lambda e - z)(\lambda^{n-1}e - \ldots - z^{n-1})$$

zapewnia, że element $(\lambda^n - 1)e$ także nie jest odwracalny, czyli λ musi być n - tym pierwiastkiem z jedynki. Rozważmy zbiór $U = \{\lambda \in \mathbb{C} : e(1-\lambda) + \lambda z \in G(A)\}$. Zauważmy, że $\lambda \notin U$ wtedy i tylko wtedy, gdy element $(\lambda - 1)e - \lambda z$ nie jest odwracalny, co dowodzi, iż dopełnienie U jest skończone (łatwo widać, że $0 \in U$, a dla pozostałych możemy podzielić przez λ, by doprowadzić do sytuacji poprzedniej). Skoro dopełnienie U jest skończone, to sam zbiór U jest spójny. Zdefiniujmy teraz funkcję $f : U \mapsto G(A)$ za pomocą wzoru $f(\lambda) = e(1-\lambda) + \lambda z$. Jest to funkcja ciągła o własności $f(0) = e$ oraz $f(1) = z$. Obraz zbioru spójnego przy przekształceniu ciągłym jest spójny, więc z należy do głównej składowej, czyli $z \in \mathrm{Exp}(A)$. Ostatecznie $x = \exp(n^{-1}y)z$ należy również do $\mathrm{Exp}(A)$, do dowodzi beztorsyjności grupy ilorazowej $G(A)/\mathrm{Exp}(A)$. Druga część twierdzenia wynika łatwo z pierwszej, ale dla kompletności wywodu podamy rozumowanie. Załóżmy, że $G(A)$ nie jest spójna. Istnieje więc $x \in G(A)$, który nie należy do $\mathrm{Exp}(A)$. Pokażemy, iż każda potęga x należy do innej składowej spójności $G(A)$. Istotnie, załóżmy przeciwnie, tzn. niech x^k oraz x^l, gdzie $k > l$ należą do tej samej składowej spójności $\widetilde{G}$. Wówczas

$$x^{k-l} \in \widetilde{G}x^{-l} = G_1,$$

czyli element x^{k-l} jest skończonego rzędu w grupie $G(A)/\mathrm{Exp}(A)$, co przeczy pierwszej części twierdzenia. □

1.3 Spektrum i Promień Spektralny

W tym podrozdziale zajmiemy się kluczowymi dla teorii algebr Banacha pojęciami - *spektrum* i *promieniem spektralnym*. Podstawowe ich własności przedstawia

Twierdzenie 1.3.5, z którego bez trudu wnioskujemy fundamentalne dla teorii przemiennej Twierdzenie Gelfanda - Mazura 1.3.8. Dalej badamy szczegółowo, jak zmienia się spektrum przy przechodzeniu do podalgebr (Twierdzenie 1.3.11). Zacznijmy od definicji.

Definicja 1.3.1. Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką oraz $x \in A$. Określamy spektrum elementu x jako

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(A)\} \subset \mathbb{C}.$$

W przypadku, gdy A jest zespoloną algebrą Banacha bez jedynki to określamy spektrum elementu $x \in A$ jako spektrum tego elementu w algebrze A_e (z dołączoną jedynką), czyli

$$\sigma_A(x) := \sigma_{A_e}(x).$$

Dopełnienie spektrum elementu nazywamy zbiorem rezolwenty x i oznaczamy przez $\rho(x)$.

Odnotujmy jeszcze prosty fakt mający zastosowanie w przypadku algebr bez jedynki.

Fakt 1.3.2. *Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha bez jedynki oraz $x \in A$. Wówczas $0 \in \sigma(x)$.*

Dowód. Rzeczywiście, jeśli element x byłby odwracalny w A, to $xx^{-1} = e \in A$, co przeczy założeniu. □

Czas na definicję promienia spektralnego.

Definicja 1.3.3. Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha oraz $x \in A$. Określamy promień spektralny elementu $x \in A$ jako

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

W tej chwili nie wiemy, czy ta definicja jest poprawna, gdyż nie ma żadnej gwarancji, iż spektrum elementu jest niepuste. Wykazanie tego fundamentalnego faktu stanowi nasz najbliższy cel. Udowodnijmy w tym celu lemat pomocniczy.

Lemat 1.3.4 (Równanie rezolwenty)**.** *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz niech $x \in A$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ będą takie, że $(\lambda e - x), (\mu e - x) \in G(A)$. Wówczas prawdziwe jest równanie rezolwenty*

$$(\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1}.$$

Dowód. Jest to formalny rachunek.

$$\begin{gathered}(\lambda e - x)^{-1} = (\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)(\mu e - x)^{-1} = \\ = (\lambda e - x)^{-1}\left((\mu - \lambda)e + (\lambda e - x)\right)(\mu e - x)^{-1} = \\ = \big((\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1} + e\big)(\mu e - x)^{-1} = \\ = (\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1} + (\mu e - x)^{-1}.\end{gathered}$$

□

Możemy już przejść do najważniejszego twierdzenia tego podrozdziału.

Twierdzenie 1.3.5. *Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką oraz $x \in A$. Wówczas*

1. *$\sigma(x)$ jest niepustym i zwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej.*
2. *Promień spektralny $r(x)$ spełnia*

$$r(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} ||x^n||^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} ||x^n||^{\frac{1}{n}}. \tag{1.4}$$

Zauważmy, że istnienie granicy z punktu 2. *jest częścią tezy oraz nierówność*

$$r(x) \leqslant ||x|| \tag{1.5}$$

jest zawarta we wzorze na promień spektralny.

Dowód. Jeśli $\lambda > ||x||$, to element $e - \lambda^{-1}x \in G(A)$ na mocy Wniosku 1.2.3, a więc również $\lambda e - x \in G(A)$, co dowodzi (1.5) i uzasadnia ograniczoność spektrum. Aby wykazać zwartość wystarczy uzasadnić domkniętość. Określmy w tym celu funkcję $g : \mathbb{C} \mapsto A$ wzorem $g(\lambda) = \lambda e - x$. Jest to oczywiście funkcja ciągła, a ponadto

$$\rho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x) = g^{-1}(G(A)).$$

Stąd zbiór rezolwenty x jest otwarty, czyli spektrum jako jego dopełnienie jest domknięte. Zdefiniujmy funkcję $f : \rho(x) \mapsto A$ wzorem $f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$. Z Lematu 1.3.4 dostajemy

$$\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = -f(\lambda)f(\mu)$$

a więc funkcja f jest słabo holomorficzna na $\rho(x)$ (korzystamy z ciągłości operacji odwrotności). Jeśli $\lambda > ||x||$, to analogicznie jak w Twierdzeniu 1.2.2 i Wniosku 1.2.3 otrzymujemy

$$f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n. \tag{1.6}$$

Szereg ten jest zbieżny jednostajnie na każdym okręgu Γ_r o środku w zerze i promieniu $r > ||x||$. Całkowanie wyraz po wyrazie szeregu (1.6) jest zatem dozwolone, co prowadzi do

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \lambda^m f(\lambda) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \lambda^{m-n-1} d\lambda \text{ dla } m \in \mathbb{N} \text{ oraz } r > ||x||$$

Jak pamiętamy z kursu funkcji analitycznych ostatnia całka jest równa 1, gdy $m = n$, zaś równa 0 w pozostałych przypadkach. Stąd

$$x^m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \lambda^m f(\lambda) d\lambda \text{ dla } r > ||x|| \text{ i } m \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Gdyby $\sigma(x)$ było zbiorem pustym, to $\rho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x) = \mathbb{C}$, a więc wszystkie całki w (1.7) byłyby równe 0. Przyjmując jednak $m = 0$ widzimy, że lewa strona jest równa $e \neq 0$, co jest sprzecznością dowodzącą niepustości spektrum. Ponieważ $\rho(x)$ zawiera wszystkie $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniające $|\lambda| > r(x)$, zastosowanie wzoru Cauchy'ego dowodzi, że warunek $r > ||x||$ można we wzorze (1.7) zastąpić przez $r > r(x)$. Oznaczmy

$$M(r) = \max_{\theta} ||f(re^{i\theta})|| \text{ dla } r > r(x).$$

Ciągłość f implikuje, że $M(r) < \infty$. Przyjrzenie się tożsamości (1.7) daje teraz

$$||x^n|| \leqslant r^{n+1} M(r).$$

Stąd otrzymujemy

$$\limsup_{n\to\infty} ||x^n||^{\frac{1}{n}} \leqslant r \text{ dla } r > r(x),$$

czyli

$$\limsup_{n\to\infty} ||x^n||^{\frac{1}{n}} \leqslant r(x). \tag{1.8}$$

Z drugiej strony, jeśli $\lambda \in \sigma(x)$, to rozkład

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1} x + \ldots + x^{n-1})$$

pokazuje, że $\lambda^n e - x^n$ nie jest odwracalny. Zatem $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ i z oszacowania (1.5) otrzymujemy $|\lambda^n| \leqslant ||x^n||$ dla $n \in \mathbb{N}$, a stąd ostatecznie

$$r(x) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} ||x^n||^{\frac{1}{n}},$$

co w połączeniu z nierównością (1.8) dowodzi (1.4). □

Uwaga 1.3.6. Niepustość spektrum moglibyśmy również udowodnić łatwo korzystając z twierdzenia Liouville'a. Rzeczywiście, z równania (1.6) otrzymujemy dla $|\lambda| > \|x\|$

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|},$$

czyli $(\lambda e - x)^{-1}$ dąży do 0 przy $|\lambda| \to \infty$, a więc f jest ograniczona i możemy zastosować twierdzenie Liouville'a, aby założenie o pustości spektrum doprowadziło nas do sprzeczności.

Niepustość spektrum jest kluczowa do opisu algebr z dzieleniem nad $\mathbb{C}$. Przypomnijmy krótko definicję.

Definicja 1.3.7. Algebrę z jedynką nazywamy algebrą z dzieleniem, gdy każdy jej niezerowy element jest odwracalny.

Pora na słynne *twierdzenie Mazura - Gelfanda.*

Twierdzenie 1.3.8 (Gelfand, Mazur)**.** *Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z dzieleniem. Wówczas A jest izometrycznie izomorficzna z ciałem liczb zespolonych.*

Dowód. Weźmy $x \in A$ i dwie liczby zespolone $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tylko jeden z elementów $\lambda_1 e - x$ oraz $\lambda_2 e - x$ może być równy zero, więc drugi jest odwracalny. Skoro $\sigma(x)$ jest niepuste, to z ostatniego zdania wynika, iż składa się ono z jednego punktu, który nazwiemy $\lambda(x)$. Z definicji, $\lambda(x)e - x$ nie jest odwracalny, czyli jest równy 0, a stąd $x = \lambda(x)e$. Widzimy bez trudu, że odwzorowanie $x \mapsto \lambda(x)$ jest izomorfizmem A na $\mathbb{C}$. Ponadto, jest to izometria, gdyż

$$||x|| = ||\lambda(x)e|| = |\lambda(x)|.$$

□

Często zdarza się, iż nasza algebra Banacha A jest podalgebrą pewnej algebry Banacha B. Warto w takiej sytuacji zastanowić się, jaka jest relacja pomiędzy $\sigma_A(x)$ oraz $\sigma_B(x)$. Bez trudu widzimy, że $\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x)$ ("łatwiej jest być odwracalnym w większej algebrze"). Aby dokładniej zbadać tego typu zjawiska uzasadnimy najpierw dwa lematy.

Lemat 1.3.9. *Niech V i W będą zbiorami otwartymi w pewnej przestrzeni topologicznej X i niech $V \subset W$. Załóżmy, że W nie zawiera punktów z brzegu V. Wówczas V jest sumą składowych W.*

Dowód. Niech Ω będzie składową W przecinającą V. Oznaczmy $U = X \setminus \overline{V}$. Z założenia W nie zawiera punktów brzegowych V, więc

$$\Omega = (\Omega \cap V) \cup (\Omega \cap U) \text{ oraz } (\Omega \cap V) \cap (\Omega \cap U) = \emptyset.$$

Zbiór Ω jest spójny, więc $\Omega \cap U = \emptyset$, a więc $\Omega \subset V$. □

Lemat 1.3.10. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz $x_n \in G(A)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $x_n \to x$ przy $n \to \infty$ oraz x jest punktem brzegowym $G(A)$, to*

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n^{-1}|| = \infty.$$

Dowód. Gdyby teza była fałszywa, to istniałoby $M < \infty$ takie, że

$$||x_n^{-1}|| < M \text{ dla nieskończenie wielu } n.$$

Dla pewnego z nich zachodzi $||x_n - x|| < \frac{1}{M}$. Wówczas

$$||e - x_n^{-1}x|| = ||x_n^{-1}(x_n - x)|| < 1,$$

a więc z Twierdzenia 1.2.2 $x_n^{-1}x \in G(A)$. Jednak $x = x_n(x_n^{-1}x)$, a $G(A)$ jest grupą, co prowadzi do $x \in G(A)$. Jest to sprzeczność z otwartością $G(A)$ (zbiór otwarty nie zawiera swoich punktów brzegowych). □

Możemy już przejść do twierdzenia, które opisuje szczegółowo relację pomiędzy spektrami elementu względem różnych algebr. Trzeci podpunkt poniższego twierdzenia jest nazywany *abstrakcyjnym twierdzeniem Rungego* i rzeczywiście, jak zobaczymy później wynika z niego klasyczne twierdzenie Rungego.

Twierdzenie 1.3.11. *Niech B będzie algebrą Banacha z jedynką oraz A jej domkniętą podalgebrą z jedynką. Wówczas*

- *$G(A)$ jest sumą składowych $A \cap G(B)$.*
- *Jeśli $x \in A$, to $\sigma_A(x)$ jest sumą $\sigma_B(x)$ i (być może pustej) rodziny ograniczonych składowych dopełnienia $\sigma_B(x)$. W szczególności $\partial\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.*
- *Jeśli $x \in A$ jest takie, że dla każdej ograniczonej składowej S dopełnienia $\sigma_B(x)$ istnieje $\lambda \in S$ o własności $(\lambda e - x)^{-1} \in A$, to $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

Dowód. Zachodzi oczywista inkluzja $G(A) \subset G(B)$. Ponadto, obydwa zbiory $G(A)$ oraz $A \cap G(B)$ są otwarte w A (druga część wynika stąd, iż elementy z A nieodwracalne w B stanowią zbiór domknięty w B, a więc także i w A). Z Lematu 1.3.9 wystarczy uzasadnić, że $G(B)$ nie zawiera żadnego punktu brzegowego y zbioru $G(A)$. Taki punkt y jest granicą ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów z $G(A)$. Gdyby $y \in G(B)$, to z ciągłości operacji odwrotności ciąg $(x_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ byłby zbieżny do y^{-1}, a więc $\{||x_n^{-1}||\}$ byłby ograniczony, co przeczy Lematowi 1.3.10 i kończy dowód pierwszej części.
Zachodzi inkluzja $\rho_A(x) \subset \rho_B(x)$. Niech teraz λ_0 będzie punktem brzegowym $\rho_A(x)$. Wówczas $\lambda_0 e - x$ jest punktem brzegowym $G(A)$, więc na mocy poprzedniej części rozumowania $\lambda_0 e - x \notin G(B)$. W związku z tym $\lambda_0 \notin \rho_B(x)$. Korzystając znów z Lematu 1.3.9 otrzymujemy, iż $\rho_A(x)$ jest sumą pewnych składowych $\rho_B(x)$. Pozostałe składowe są zatem podzbiorami $\sigma_A(x)$. Ostatni punkt wynika łatwo z poprzedniego. $\square$

Odnotujmy teraz użyteczne wnioski.

Wniosek 1.3.12. *Niech $x \in A \subset B$ (notacja taka jak w ostatnim twierdzeniu).*

1. *Jeśli $\sigma_B(x)$ nie rozdziela $\mathbb{C}$, czyli $\rho_B(x)$ jest spójne, to $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*
2. *Jeśli $\sigma_A(x)$ jest większe niż $\sigma_B(x)$, to $\sigma_A(x)$ powstaje z $\sigma_B(x)$ przez "wypełnienie pewnych dziur" w $\sigma_B(x)$.*
3. *Jeśli $\sigma_A(x)$ ma puste wnętrze, to $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

Wniosek 1.3.13 (Szyłow)**.** *Niech $x \in A \subset B$ (notacja taka jak w ostatnim twierdzeniu). Wówczas*

1. *$\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x)$*
2. *$\partial\sigma_A(x) \subset \partial\sigma_B(x)$*

Dowód. Pierwszą część już wielokrotnie omawialiśmy, więc zajmiemy się częścią drugą. Z Twierdzenia 1.3.11 wiemy, że $\partial\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$. Zatem

$$\partial\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x) \cap \overline{\rho_A(x)} \subset \sigma_B(x) \cap \overline{\rho_B(x)} = \partial\sigma_B(x).$$

□

Uwaga 1.3.14. Kluczowe dla dowodu inkluzji $\partial\sigma_A(x) \subset \partial\sigma_B(x)$ zawieranie $\partial\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$ można wykazać bardziej bezpośrednio. Istotnie, jeśli $\lambda \in \partial\sigma_A(x)$, to istnieje ciąg $\lambda_n \notin \sigma_A(x)$ taki, że $\lambda_n \to \lambda$ przy $n \to \infty$. Wobec tego $G(B) \supset G(A) \ni \lambda_n e - x \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda e - x$. Gdyby więc $\lambda \notin \sigma_B(x)$, to $\lambda e - x \in G(B)$ i z ciągłości operacji odwrotności $(\lambda_n e - x)^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} (\lambda e - x)^{-1}$. Jednak $(\lambda_n e - x)^{-1} \in G(A)$, a więc również $(\lambda e - x)^{-1} \in A$, co przeczy założeniu $\lambda \in \sigma_A(x)$.

Na koniec tego podrozdziału zastanowimy się, czy widma dwóch elementów algebry Banacha są bliskie siebie, gdy ich odległość jest odpowiednio mała.

Twierdzenie 1.3.15. *Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką oraz $x \in A$. Jeśli Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbb{C}$ spełniającym $\sigma(x) \subset \Omega$, to istnieje $\delta > 0$ taka, że $\sigma(x+y) \subset \Omega$, o ile $y \in A$ spełnia $||y|| < \delta$.*

Dowód. Rozważmy funkcję $f : \rho(x) \mapsto \mathbb{R}_+$ określoną wzorem

$$f(\lambda) = ||(\lambda e - x)^{-1}||$$

Jest to funkcja ciągła, a ponadto

$$f(\lambda) = \|(\lambda e - x)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \right\|$$

Gdy $\lambda \to \infty$ wyrażenie $||(e - \frac{x}{\lambda})^{-1}||$ dąży do 1, a więc $f(\lambda) \to 0$. W szczególności f jest funkcją ograniczoną, czyli istnieje $M < \infty$ spełniające $f(\lambda) < M$ dla $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Jeśli teraz $y \in A$ jest takie, że $||y|| < \frac{1}{M}$, to dla $\lambda \notin \Omega$ mamy

$$\lambda e - (x + y) = (\lambda e - x)[e - (\lambda e - x)^{-1} y].$$

W oparciu o Wniosek 1.2.3 jest to element odwracalny, gdyż $||(\lambda e - x)^{-1} y|| < 1$, a zatem $\lambda \notin \sigma(x+y)$, co daje tezę z $\delta = \frac{1}{M}$. □

1.4 Funkcjonały liniowo - multiplikatywne

Szczególną rolę w badaniu algebr odgrywają *homomorfizmy*. Przypomnimy definicję.

Definicja 1.4.1. Niech A oraz B będą algebrami nad tym samym ciałem K. Przekształcenie $\varphi : A \mapsto B$ nazywamy homomorfizmem, gdy jest ono liniowe oraz multiplikatywne, to znaczy

$$\forall_{x,y \in A} \; \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Najważniejsze są homomorfizmy w $\mathbb{C}$, o których mówi kolejna definicja.

Definicja 1.4.2. Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha. Funkcjonałem liniowo - multiplikatywnym (homomorfizmem zespolonym) nazywamy każdy niezerowy homomorfizm w ciało liczb zespolonych.

Odnotujmy prosty fakt.

Fakt 1.4.3. *Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką oraz φ funkcjonałem liniowo - multiplikatywnym na A. Wówczas $\varphi(e) = 1$ oraz $\varphi(x) \neq 0$ dla każdego $x \in G(A)$.*

Dowód. Weźmy $y \in A$ taki, że $\varphi(y) \neq 0$. Wówczas

$$\varphi(y) = \varphi(ey) = \varphi(e)\varphi(y),$$

co daje $\varphi(e) = 1$. Dalej, niech $x \in G(A)$. Mamy

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1,$$

co kończy dowód. □

Multiplikatywność funkcjonału jest własnością bardzo silną - w następnym stwierdzeniu okaże się, iż wymusza ona ciągłość.

Stwierdzenie 1.4.4. *Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką. Wówczas każdy funkcjonał liniowo - multiplikatywny jest ciągły i ma normę 1.*

Dowód. Niech φ będzie funkcjonałem liniowo multiplikatywnym. Ponieważ jedynka algebry ma normę 1 zachodzi

$$||\varphi||_{A^*} = \sup_{||x||=1} |\varphi(x)| \geqslant |\varphi(e)| = 1.$$

Dla dowodu drugiej nierówności weźmy dowolny $x \in A$ oraz liczbę zespoloną λ taką, że $|\lambda| > ||x||$. Z Wniosku 1.2.3 element $e - \lambda^{-1}x$ jest odwracalny. Zatem Fakt 1.4.3 daje

$$0 \neq \varphi(e - \lambda^{-1}x) = \varphi(e) - \lambda^{-1}\varphi(x) = 1 - \lambda^{-1}\varphi(x),$$

czyli $\varphi(x) \neq \lambda$. Zatem $|\varphi(x)| \leqslant ||x||$, co kończy dowód. □

Algebra A, na której badane są funkcjonały liniowo - multiplikatywne może nie mieć jedynki, więc powstaje naturalne pytanie, w jaki sposób można je na algebrę A_e z dołączoną jedynką rozszerzyć. Zadanie jest bardzo proste i wynika z relacji $\varphi(e) = 1$, która jest prawdziwa dla dowolnego funkcjonału liniowo - multiplikatywnego na algebrze Banacha z jedynką.

Definicja 1.4.5. Niech A będzie algebrą. Oznaczmy przez $\mathfrak{M}(A) = \triangle(A)$ zbiór funkcjonałów liniowo - multiplikatywnych na A. Jeśli algebra A nie ma jedynki, to każdy $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ ma jednoznaczne rozszerzenie $\widetilde{\varphi}$ do elementu $\mathfrak{M}(A_e)$ zadane wzorem

$$\widetilde{\varphi}(x + \lambda e) = \varphi(x) + \lambda \text{ dla } x \in A \text{ oraz } \lambda \in K.$$

W ten sposób $\mathfrak{M}(A) \subset \mathfrak{M}(A_e)$. Ponadto określając $\varphi_\infty \in \mathfrak{M}(A_e)$ za pomocą wzoru

$$\varphi_\infty(x + \lambda e) = \lambda$$

otrzymujemy $\mathfrak{M}(A_e) = \mathfrak{M}(A) \cup \{\varphi_\infty\}$ (wynika to stąd, iż jeśli $\psi \in \mathfrak{M}(A_e)$ oraz $\psi \neq \varphi_\infty$, to $\psi|_A \in \mathfrak{M}(A)$, więc $\psi = \widetilde{\psi|_A}$.)

Z lematu 1.4.4 otrzymujemy natychmiast poniższy wniosek.

Wniosek 1.4.6. *Niech A będzie zespoloną algebra Banacha. Wówczas każdy funkcjonał liniowo - multiplikatywny jest ciągły i ma normę ograniczoną przez 1.*

Zastanowimy się teraz, czy multiplikatywność funkcjonału da się wymusić z jakiegoś prostszego do sprawdzenia warunku. Jest to treścią słynnego twierdzenia *Gleasona - Kahana - Żelazki.* Aby je udowodnić potrzebne będą nam dwa lematy. Pierwszy ma charakter analityczny.

Lemat 1.4.7. *Niech f będzie funkcją całkowitą spełniającą $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ oraz*

$$0 < |f(\lambda)| \leqslant e^{|\lambda|} \text{ dla } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Wówczas $f(\lambda) = 1$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dowód. Skoro f nie ma zer to istnieje funkcja całkowita g taka, że $f = \exp(g)$. Założenia nałożone na f pociągają za sobą własności: $g(0) = g'(0) = 0$ oraz $\mathrm{Re}[g(\lambda)] \leqslant |\lambda|$. Weźmy $r > 0$. Zachodzi nierówność

$$|g(\lambda)| \leqslant |2r - g(\lambda)| \text{ dla } |\lambda| \leqslant r. \tag{1.9}$$

Istotnie, wynika to wprost z oszacowania $\mathrm{Re}[g(\lambda)] \leqslant |\lambda| \leqslant r$,

$$\begin{aligned} |g(\lambda)|^2 &= Re[g(\lambda)]^2 + Im[g(\lambda)]^2 \leqslant r^2 + Im[g(\lambda)]^2 \\ &\leqslant (2r - Re[g(\lambda)])^2 + Im[g(\lambda)]^2 \leqslant |2r - g(\lambda)|^2. \end{aligned}$$

Określmy funkcję h_r wzorem

$$h_r(\lambda) = \frac{r^2 g(\lambda)}{\lambda^2[2r - g(\lambda)]}. \tag{1.10}$$

Funkcja h_r jest holomorficzna w zbiorze $\{\lambda : |\lambda| < 2r\}$. Rzeczywiście, holomorficzność w zerze wynika z faktu, że funkcja g ma w tym punkcie zero dwukrotne, a mianownik w innych punktach się nie zeruje, co wynika z nierówności $\mathrm{Re}[g(\lambda)] \leqslant |\lambda|$. Ponadto, jeśli $|\lambda| = r$, to oszacowanie (1.9) daje $|h_r(\lambda)| \leqslant 1$. Z zasady maksimum wynika więc, że $|h_r(\lambda)| \leqslant 1$ dla $|\lambda| \leqslant r$. Na koniec, ustalamy $\lambda \in \mathbb{C}$ i puszczamy $r \to \infty$. Wówczas definicja (1.10) oraz poprzednia uwaga prowadzi do wniosku $g(\lambda) = 0$, czyli $f(\lambda) = 1$. □

Drugi lemat ma charakter czysto algebraiczny.

Lemat 1.4.8. *Niech A będzie algebrą z jedynką. Załóżmy, że funkcjonał liniowy φ na A spełnia $\varphi(e) = 1$ oraz $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$ dla wszystkich $x \in A$. Wówczas φ jest multiplikatywny.*

Dowód. Z założenia mamy

$$\varphi(x^2) + \varphi(xy + yx) + \varphi(y^2) = \varphi(x^2 + xy + yx + y^2) = \varphi((x + y)^2) =$$
$$(\varphi(x) + \varphi(y))^2 = \varphi(x^2) + 2\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y^2).$$

Zatem

$$\varphi(xy + yx) = 2\varphi(x)\varphi(y) \text{ dla wszystkich } x, y \in A \tag{1.11}$$

Wystarczy więc sprawdzić warunek $\varphi(xy) = \varphi(yx)$. W tym celu zauważmy, iż zachodzi elementarny wzór

$$(ab - ba)^2 + (ab + ba)^2 = 2[a(bab) + (bab)a]. \tag{1.12}$$

Obłóżmy jego lewą stronę funkcjonałem φ i zastosujmy udowodniony wcześniej fakt (1.11),

$$\varphi((ab-ba)^2)+4\varphi(a)^2\varphi(b)^2 = \varphi((ab-ba)^2)+\varphi(ab+ba)^2 = \varphi((ab-ba)^2+(ab+ba)^2).$$

Użyjmy teraz wzoru (1.12), co prowadzi do

$$\varphi(ab - ba)^2 + 4\varphi(a)^2\varphi(b)^2 = 2\varphi(a(bab) + (bab)a) = 4\varphi(a)\varphi(bab). \tag{1.13}$$

Przyjmijmy teraz $a = x - \varphi(x)e$ oraz $b = y$. Wówczas $\varphi(a) = 0$ i z tożsamości (1.13) uzyskujemy $\varphi(ay) = \varphi(ya)$. Podstawiając teraz poprzednio zdefiniowane a otrzymamy $\varphi(xy) = \varphi(yx)$, czyli tezę. □

Możemy już przejść do głównego twierdzenia.

Twierdzenie 1.4.9 (Gleason,Kahane,Żelazko)**.** *Jeśli φ jest funkcjonałem na algebrze Banacha A takim, że $\varphi(e) = 1$ i $\varphi(x) \neq 0$ dla każdego odwracalnego $x \in A$, to*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \text{ dla wszystkich } x, y \in A.$$

Dowód. Niech $N = \ker\varphi$. Dla $x \in A$ założenie $\varphi(e) = 1$ prowadzi do

$$x = a + \varphi(x)e, \tag{1.14}$$

gdzie $a \in N$. Jeśli zadziałamy φ na kwadrat równania 1.14, to otrzymamy

$$\varphi(x^2) = \varphi(a^2) + \varphi(x)^2.$$

Należy więc udowodnić, iż

$$a^2 \in N, \text{ gdy } a \in N, \tag{1.15}$$

bo wtedy

$$\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$$

i tezę zapewni Lemat 1.4.8. Z założenia N nie zawiera żadnego odwracalnego elementu A. Zatem $||e - x|| \geqslant 1$ dla wszystkich $x \in N$ na mocy punktu 2. Twierdzenia 1.2.2. Weźmy $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas $\lambda^{-1}x \in N$, co daje

$$||\lambda e - x|| \geqslant |\lambda| = |\varphi(\lambda e - x)| \text{ dla } x \in N \text{ oraz } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.16}$$

Nierówność (1.16) implikuje, że φ jest ciągłym funkcjonałem liniowym o normie 1. Istotnie, weźmy dowolne $y \in A$ i zapiszmy je w postaci $y = \varphi(y)e - x$, gdzie $x \in N$ podobnie jak w (1.14). Wtedy równanie 1.16 pociąga ze sobą $|\varphi(y)| \leqslant ||y||$, co wraz z $\varphi(e) = 1$ kończy uzasadnienie. Wracając do dowodu relacji 1.15 ustalmy $a \in N$ i załóżmy bez straty ogólności, że $||a|| = 1$. Połóżmy

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(a^n)}{n!} \lambda^n \text{ dla } \lambda \in \mathbb{C}$$

Ze względu na $|\varphi(a^n)| \leqslant ||a^n|| \leqslant ||a||^n = 1$, funkcja f jest całkowita i spełnia $|f(\lambda)| \leqslant \exp(|\lambda|)$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$. Ponadto $f(0) = \varphi(e) = 1$ i $f'(0) = \varphi(a) = 0$. Jeśli udowodnimy, że $f(\lambda) \neq 0$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$, to z Lematu 1.4.7 wynikać będzie $f''(0) = 0$, czyli $\varphi(a^2)$=0, co zakończy dowód (1.15). Z ciągłości φ mamy jednak

$$f(\lambda) = \varphi(\exp(a\lambda)).$$

Z drugiej strony końcowe rozważania podrozdziału 1.2. przypominają nam, że $\mathrm{Exp}(A) \subset G(A)$, a więc z założeń wynika $\varphi(\exp(a\lambda)) \neq 0$, co pozwala zastosować poprzedni argument. □

Funkcjonały liniowo - multiplikatywne stanowią bardzo ważne narzędzie badania przemiennych algebr Banacha, o czym przekonamy się wkrótce. Wyznaczymy więc teraz postać funkcjonałów liniowo - multiplikatywnych na niektórych algebrach.

Przykład 1.4.10. Każdy funkcjonał liniowo - multiplikatywny na algebrze $L^1(\mathbb{R})$ jest postaci

$$\varphi(f) = \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iyx}dy \text{ dla pewnego } x \in \mathbb{R} \text{ oraz wszystkich } f \in L^1(\mathbb{R})$$

Każdy funkcjonał liniowo - multiplikatywny na algebrze $L^1(\mathbb{T})$ jest postaci

$$\varphi(f) = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{Z} \text{ oraz wszystkich } f \in L^1(\mathbb{T}).$$

Każdy funkcjonał liniowo - multiplikatywny na algebrze $l^1(\mathbb{Z})$ jest postaci

$$\varphi(a_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \text{ dla pewnego } t \in \mathbb{T} \text{ oraz wszystkich } a_n \in l^1(\mathbb{Z}).$$

Dowód. Zacznijmy od pierwszego przykładu. Niech φ będzie funkcjonałem liniowo - multiplikatywnym na $L^1(\mathbb{R})$. W szczególności $\varphi \in L^1(\mathbb{R})^* \simeq L^\infty(\mathbb{R})$, więc istnieje funkcja $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R})$ taka, że

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\gamma(t)dt \text{ dla } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Przyjmijmy $f_y(x) = f(x-y)$ dla $f \in L^1(\mathbb{R})$ oraz $y \in \mathbb{R}$. Rozpisując splot otrzymamy

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\gamma(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\gamma(x)dydx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_y(x)\gamma(x)dx \right) g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)\varphi(f_y)dy.$$

Z drugiej strony,

$$\varphi(f)\varphi(g) = \varphi(f)\int_{\mathbb{R}} g(y)\gamma(y)dy.$$

Z multiplikatywności funkcjonału φ, wybierając funkcję $f \in L^1(\mathbb{R})$ tak, aby $\varphi(f) \neq 0$ uzyskujemy (mamy równość wyrażeń pod całką dla wszystkich $g \in L^1(\mathbb{R})$)

$$\varphi(f)\gamma(y) = \varphi(f_y)$$

dla prawie wszystkich y. Ciągłość operatora przesunięcia $y \mapsto f_y$ oraz funkcjonału φ dowodzi, iż prawa strona powyższego równania jest funkcją ciągłą zmiennej y, a więc po ewentualnej modyfikacji na zbiorze miary zero możemy zakładać, że γ jest funkcją ciągłą. Wstawiając $x+y$ zamiast zmiennej x oraz f_x zamiast funkcji f otrzymujemy

$$\varphi(f)\gamma(x+y) = \varphi(f_{x+y}) = \varphi((f_x)_y) = \varphi(f_x)\gamma(y) = \varphi(f)\gamma(x)\gamma(y),$$

skąd

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y).$$

Jak wszyscy wiemy ciągłe rozwiązania tego równania są postaci $\gamma(x) = e^{cx}$, gdzie $c \in \mathbb{C}$. Ograniczoność funkcji γ wymusza warunek $c = iy$ dla $y \in \mathbb{R}$, co kończy dowód.
W drugim przypadku rozumujemy analogicznie, z tym że ciągłość funkcji γ na $\mathbb{T}$ pociąga za sobą $y \in \mathbb{Z}$.
Niech teraz $\varphi \in \mathfrak{M}(l^1(\mathbb{Z}))$. Rozważmy ciąg $x_0 = (\delta_{1n})$ oraz niech $\varphi(x_0) = \alpha \in \mathbb{C}$. Zauważmy, że dowolny element $(a_n) \in l^1(\mathbb{Z})$ możemy zapisać w postaci

$$(a_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_0^n,$$

a więc

$$\varphi(a_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \alpha^n. \tag{1.17}$$

Ponadto, element x_0 jest odwracalny ($x_0^{-1} = (\delta_{n(-1)})$), a więc $\alpha \neq 0$. Aby uzasadnić, iż $|\alpha| = 1$ wystarczy zwrócić uwagę, że każdy funkcjonał liniowo - multiplikatywny jest funkcjonałem ciągłym o normie 1, co prowadzi do $|\alpha^n| \leqslant 1$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Skoro $|\alpha| = 1$, to istnieje $t \in [0, 2\pi)$ czyniące zadość równości $\alpha = e^{it}$. Teraz tożsamość (1.17) kończy dowód. $\square$

Rozdział 2

Przemienne Algebry Banacha

2.1 Ideały modularne

Zajmiemy się teraz ideałami.

Definicja 2.1.1. Niech A będzie algebrą oraz $I \subset A$ ideałem właściwym. Ideał I nazywamy maksymalnym, jeśli dla dowolnego ideału J zachodzi implikacja

$$I \subset J \Rightarrow I = J \text{ lub } J = A.$$

Ideał I nazwiemy ideałem modularnym, gdy algebra ilorazowa A/I ma jedynkę, lub równoważnie istnieje $u \in A$ takie, że oba zbiory

$$A(1-u) := \{x - xu : x \in A\} \text{ oraz } (1-u)A := \{x - ux : x \in A\}$$

są zawarte w I. Taki element u nazywamy jedynką modulo I. Ideał I nazywamy maksymalnym ideałem modularnym, gdy jest maksymalny i modularny.

Odnotujmy teraz prosty fakt.

Fakt 2.1.2. *Ideał zawierający ideał modularny jest ideałem modularnym.*

Dowód. Niech $J \subset I$ będą ideałami oraz J będzie modularny. Oznaczmy przez u jedność modulo J. Wówczas

$$A(1-u) := \{x - xu : x \in A\} \subset J \subset I$$

i analogicznie w drugą stronę. □

Otrzymujemy stąd łatwy wniosek.

Wniosek 2.1.3. *Ideał jest maksymalnym ideałem modularnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest maksymalny w klasie wszystkich właściwych ideałów modularnych.*

Wprowadzimy teraz definicję.

Definicja 2.1.4. Niech A będzie algebrą. Przez $\mathrm{Max}(A)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich maksymalnych ideałów modularnych.

Należy się zastanowić, czy takie ideały zawsze istnieją. Częściową odpowiedź daje lemat Kuratowskiego - Zorna.

Lemat 2.1.5. *Każdy właściwy ideał modularny jest zawarty w maksymalnym ideale modularnym.*

Dowód. Niech I będzie właściwym ideałem modularnym oraz $u \in A$ niech będzie jedynką modulo I. Rozważmy zbiór

$$\mathcal{L} = \{L \lhd A : I \subset L \text{ oraz } u \notin L\}.$$

Wówczas $\mathcal{L}$ jest niepuste, bo $I \in \mathcal{L}$. Porządkujemy zbiór $\mathcal{L}$ przez inkluzję i weźmy $\mathcal{K}$ - liniowo uporządkowany podzbiór $\mathcal{L}$. Połóżmy

$$L = \bigcup \{K : K \in \mathcal{K}\}.$$

Wtedy $u \notin L$ oraz L jest ideałem. Stąd $L \in \mathcal{L}$ i L jest ograniczeniem górnym dla $\mathcal{K}$. Spełnione są zatem założenia Lematu Kuratowskiego - Zorna, czyli istnieje w $\mathcal{L}$ element maksymalny M. Jeśli teraz $M \subset J$ dla pewnego właściwego ideału J, to $u \notin J$, bo inaczej $x = x - ux + ux \in M + J = J$ dla każdego $x \in A$. Stąd $J \in \mathcal{L}$, co implikuje $J = M$ i maksymalność ideału M. $\square$

Przypomnijmy jeszcze krótko sytuację w algebrach z jedynką.

Fakt 2.1.6. *Niech A będzie algebrą z jedynką. Wówczas*

1. *Każdy ideał jest modularny.*
2. *Jeśli algebra A jest przemienna, to element $x \in A$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $x \notin M$ dla każdego $M \in \mathrm{Max}(A)$.*

Dowód. Pierwsza część jest oczywista, więc zajmiemy się punktem 2. Zauważmy, że $x \notin G(A) \iff Ax$ jest ideałem właściwym, a więc z Lematu 2.1.5 $Ax \subset M$ dla pewnego $M \in \mathrm{Max}(A)$. $\square$

W kontekście algebr Banacha najważniejsze są ideały domknięte. Pewne informacje w tym zakresie podaje poniższy lemat.

Lemat 2.1.7. *Niech A będzie algebrą Banacha oraz I właściwym ideałem modularnym. Jeśli $u \in A$ jest jedynką modulo I, to*

$$I \cap \{x \in A : ||x - u|| < 1\} = \emptyset.$$

W szczególności, $\overline{I}$ jest także ideałem właściwym i każdy maksymalny ideał modularny jest domknięty.

Dowód. Przyjmijmy $A' = A$, jeśli A ma jedynkę e, a w przeciwnym wypadku niech $A' = A_e$. Jeśli $||x - u|| < 1$, to na mocy Wniosku 1.2.3 element $e - (u - x)$ jest odwracalny w A'. Napiszmy $(e - (u - x))^{-1} = y + \lambda e$ i pomnóżmy obie strony równania przez $e - (u - x)$, aby otrzymać

$$e = \lambda e + y - \lambda u - yu + \lambda x + yx.$$

Dążąc do sprzeczności załóżmy, że $x \in I$. Jeśli $e \in A$, to

$$e = \lambda e - (\lambda e)u + y - yu + (\lambda e + y)x \in I,$$

co jest wykluczone. Jeśli $e \notin A$, to

$$(1 - \lambda)e = y - \lambda u - yu + \lambda x + yx \in A,$$

a stąd $\lambda = 1$, czyli $u = y - yu + x + yx \in I$ i również otrzymujemy sprzeczność. Ostatnie dwa wnioski wynikają z powyższego w sposób następujący: domknięcie ideału jest ideałem, co wynika z ciągłości mnożenia, ponadto z otwartości zbioru $\{x \in A : ||x - u|| < 1\}$

$$\overline{I} \cap \{x \in A : ||x - u|| < 1\} = \emptyset,$$

czyli $\overline{I}$ jest właściwy. Jeśli I jest maksymalny, to inkluzja $I \subset \overline{I}$ prowadzi do $I = \overline{I}$. □

Przyszedł czas na policzenie klasycznego przykładu.

Przykład 2.1.8. Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią topologiczną i dla każdego $\emptyset \neq E \subset X$ niech

$$I(E) = \{f \in C_0(X) : f(x) = 0 \text{ dla wszystkich } x \in E\}.$$

Wówczas odwzorowanie $E \mapsto I(E)$ jest bijekcją pomiędzy zbiorem niepustych, domkniętych podzbiorów X, a zbiorem domkniętych ideałów w $C_0(X)$. Co więcej, $I(E)$ jest ideałem modularnym wtedy i tylko wtedy, gdy E jest zwarty i $I(E) \in \mathrm{Max}(C_0(X))$ wtedy i tylko wtedy, gdy E jest singletonem.

Dowód. Jest jasne, że $I(E)$ jest domkniętym ideałem w $C_0(X)$. Ponadto, dla każdego $x \in X$ istnieje $f \in C_0(X)$ takie, że $f(x) \neq 0$, a więc $I(E)$ jest ideałem właściwym, o ile $E \neq \emptyset$. Skoro E jest domknięty, dla $x \in X \setminus E$, z lematu Urysohna dostajemy istnienie $f \in C_0(X)$ spełniającego warunki $f|_E = 0$ oraz $f(x) \neq 0$. W szczególności, dowodzi to różnowartościowości odwzorowania $E \mapsto I(E)$.
Niech teraz I będzie domkniętym ideałem w $C_0(X)$ i przyjmijmy

$$E = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ dla wszystkich } f \in I\}.$$

Wówczas E jest domkniętym podzbiorem X, a także $I \subset I(E)$. Aby wykazać, że $I = I(E)$ uzasadnimy najpierw, iż każde $g \in C_c(X)$ (funkcje ciągłe o nośniku zwartym na X) o własności $E \cap \mathrm{supp} g = \emptyset$ należy do I. Niech C będzie zwartym podzbiorem X spełniającym $C \cap E = \emptyset$. Wtedy dla każdego $x \in C$ istnieje $h_x \in I$ takie, że $h_x(x) \neq 0$. Zatem $|h_x|^2 = h_x \overline{h_x} \in I$, $|h_x|^2 \geqslant 0$ oraz $|h_x|^2(x) > 0$. Ze zwartości C istnieje skończony podzbiór $F \subset C$ taki, że funkcja h zdefiniowana poprzez

$$h(y) = \left(\sum_{x \in F} h_x \cdot \overline{h_x} \right)(y) = \sum_{x \in F} |h_x|^2(y), \;\; y \in X$$

jest ściśle dodatnia na C. Ponadto, $h \in I$.
Teraz, niech J będzie zbiorem tych $g \in C_c(X)$, które spełniają $E \cap \mathrm{supp} g = \emptyset$. Z tego, co udowodniliśmy przed chwilą dla każdego $g \in J$ istnieje $h \in I$ takie, że $h(y) > 0$ dla wszystkich $y \in \mathrm{supp} g$. Określmy funkcję f na X za pomocą warunków $f(x) = 0$ dla $x \in X \setminus \mathrm{supp} g$ i $f(x) = g(x)/h(x)$ dla $x \in \mathrm{supp} g$. Oczywiście f jest ciągła, a więc $f \in C_0(X)$ i $g = fh \in I$. To dowodzi inkluzji $J \subset I$, którą zapowiadaliśmy wcześniej.
Z drugiej strony, J jest gęste w $I(E)$. Rzeczywiście, weźmy $f \in I(E)$, $\varepsilon > 0$ i rozważmy $C = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$. Wówczas C jest zwarte oraz $C \cap E = \emptyset$. Znów, z lematu Urysohna istnieje $h \in C_c(X)$ takie, że $h(X) \subset [0,1]$, $h|_C = 1$ i $\mathrm{supp} h \subset X \setminus E$. Teraz $g = fh \in J$ i $||f - g||_\infty < \varepsilon$. Skoro I jest domknięty, łącząc poprzednie rezultaty dostajemy

$$I(E) = \overline{J} \subset \overline{I} = I \subset I(E),$$

a więc $I(E) = I$. Oczywiście $E \neq \emptyset$, bo inaczej $C_c(X) \subset I$, czyli $I = C_0(X)$.
Jeśli E jest zwarty, to istnieje $u \in C_0(X)$ o własności $u(x) = 1$ dla $x \in E$, co uzasadnia $C_0(X)(1-u) \subset I(E)$. Na odwrót, gdy $I(E)$ jest modularny, to istnieje $u \in C_0(X)$ o własności $C_0(X)(1-u) \subset I(E)$. To pociąga za sobą $u = 1$ na E, a więc E jest zwarty, bo $u \in C_0(X)$. Ostatnia część jest teraz prostym wnioskiem z poprzednich wyników, bo

$$E \subset F \Rightarrow I(F) \subset I(E).$$

□

2.2 Funkcjonały liniowo - multiplikatywne i radykał

Twierdzenie 2.2.1. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha. Wówczas odwzorowanie*

$$\varphi \mapsto \ker\varphi = \{x \in A : \varphi(x) = 0\}$$

jest bijekcją pomiędzy $\mathfrak{M}(A)$ i $\mathrm{Max}(A)$.

Dowód. Dla $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ zbiór $\ker\varphi$ jest ideałem i domkniętą podprzestrzenią liniową kowymiaru 1. Aby sprawdzić, że jest to ideał modularny wybierzmy $u \in A$ takie, że $\varphi(u) = 1$. Wówczas, dla każdego $x \in A$ zachodzi

$$\varphi(ux - x) = \varphi(u)\varphi(x) - \varphi(x) = 0,$$

a więc $ux - x \in \ker\varphi$, czyli u jest jednością modulo $\ker\varphi$. Ideał $\ker\varphi$ jest również oczywiście ideałem maksymalnym, gdyż inaczej zawierałby go w sposób właściwy inny ideał właściwy, a więc w szczególności właściwa podprzestrzeń liniowa, co jest wykluczone ze względu na fakt, iż $\ker\varphi$ ma kowymiar jeden. Jeśli I jest maksymalnym ideałem modularnym, to zgodnie z Lematem 2.1.7 jest to ideał domknięty, a więc A/I jest zespoloną algebrą Banacha z jedynką. Nie zawiera ona nietrywialnych ideałów, gdyż każdy taki ideał podnosiłby się do ideału zawierającego I, czyli jak pamiętamy z kursu algebry A/I jest ciałem. Zgodnie z Twierdzeniem Gelfanda - Mazura A/I jest izomorficzne z ciałem liczb zespolonych, a homomorfizm kanoniczny $\pi : A \mapsto A/I \approx \mathbb{C}$ zadaje żądany funkcjonał liniowo - multiplikatywny. Wykazaliśmy w ten sposób, że odwzorowanie z treści twierdzenia jest surjekcją. Pozostaje jeszcze uzasadnić, iż jest ono różnowartościowe. Niech więc φ_1, φ_2 będą takie, że $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2 =: I$ oraz niech u będzie jedynką modulo I. Wtedy, skoro I ma kowymiar jeden to każdy $x \in A$ może być jednoznacznie przedstawiony w postaci

$$x = \lambda u + y \text{ gdzie } y \in I \text{ oraz } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ponieważ $\varphi(u) = 1$ dla każdego funkcjonału liniowo - multiplikatywnego φ spełniającego $\ker\varphi = I$, otrzymujemy

$$\varphi_1(x) = \lambda\varphi_1(u) + \varphi_1(y) = \lambda = \lambda\varphi_2(u) + \varphi_2(y) = \varphi_2(x),$$

czyli $\varphi_1 = \varphi_2$, co kończy dowód. □

Z ostatniego twierdzenia uzyskujemy ważny wniosek.

Wniosek 2.2.2. *Na każdej zespolonej, przemiennej algebrze Banacha z jedynką istnieje funkcjonał liniowo - multiplikatywny.*

Dowód. Ideał $\{0\}$ jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym, więc zgodnie z poprzednim twierdzeniem wyznacza pewien funkcjonał liniowo - multiplikatywny. □

W poprzednim podrozdziale zbadaliśmy strukturę ideałów domkniętych w $C_0(X)$ (zobacz Przykład 2.1.8), co w połączeniu z wzajemnie jednoznaczną odpowiedniością udowodnioną przed chwilą prowadzi do poniższego przykładu.

Przykład 2.2.3. Każdy funkcjonał liniowo - multiplikatywny na $C_0(X)$ jest postaci

$$\varphi(f) = f(x) \text{ dla wszystkich } f \in C_0(X) \text{ oraz pewnego } x \in X.$$

Następne stwierdzenie zwiąże wartości funkcjonałów liniowo - multiplikatywnych ze spektrum elementu.

Stwierdzenie 2.2.4. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha z jedynką oraz $x \in A$. Liczba zespolona λ należy do $\sigma(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(x) = \lambda$ dla pewnego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$. Gdy algebra A nie ma jedynki, to powyższy fakt zachodzi dla $\lambda \neq 0$. Wtedy jednak zawsze $0 \in \sigma(x)$ oraz $\varphi_\infty(x) = 0$.*

Dowód. Zakładamy najpierw, że algebra A ma jedynkę. Niech $\lambda \in \sigma(x)$. Wówczas ideał $I = (\lambda e - x)A$ jest ideał właściwym w A, więc jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym, który zgodnie z Twierdzeniem 2.2.1 jest jądrem pewnego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$. Stąd $\varphi(\lambda e - x) = 0$, a więc $\varphi(x) = \lambda$. Weźmy teraz $\alpha \in \rho(x)$. Element $\alpha e - x$ jest odwracalny, a więc w oparciu o Fakt 1.4.3 otrzymujemy $\varphi(\alpha e - x) \neq 0$ dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$, co prowadzi do $\varphi(x) \neq \alpha$, czyli musi być $\varphi(x) \in \sigma(x)$. W przypadku algebry bez jedynki wystarczy przypomnieć sobie Fakt 1.3.2, którą pociąga za sobą prawdziwość tezy (zobacz Definicję 1.4.5). □

Możemy teraz scharakteryzować spektra elementów w pewnych algebrach Banacha.

Przykład 2.2.5. Niech $f \in L^1(\mathbb{R})$, wtedy

$$\sigma(f) = \overline{\widehat{f}(\mathbb{R})} = \widehat{f}(\mathbb{R}) \cup \{0\}.$$

Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$, wtedy

$$\sigma(f) = \overline{\widehat{f}(\mathbb{Z})} = \widehat{f}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}.$$

Udowodnimy teraz klasyczne twierdzenie Wienera.

Twierdzenie 2.2.6 (Wiener)**.** *Niech $f \in A(\mathbb{T})$ oraz $f(t) \neq 0$ dla każdego $t \in [0, 2\pi)$. Wówczas $1/f \in A(\mathbb{T})$.*

Dowód. Przypominamy sobie, że odwzorowanie $f \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, gdzie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

jest izometrycznym izomorfizmem algebry $A(\mathbb{T})$ na $l^1(\mathbb{Z})$. Stąd

$$\sigma_{A(\mathbb{T})}(f) = \sigma_{l^1(\mathbb{Z})}(a_n).$$

Z drugiej strony, postać funkcjonałów liniowo - multiplikatywnych na $l^1(\mathbb{Z})$ oraz ostatnie stwierdzenie prowadzi do

$$\sigma_{A(\mathbb{T})}(f) = \sigma_{l^1(\mathbb{Z})}(a_n) =$$
$$\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} : t \in [0, 2\pi)\} = f(\mathbb{T}).$$

Z założenia jednak $0 \notin f(\mathbb{T})$, czyli $0 \notin \sigma_{A(\mathbb{T})}(f)$, a więc f jest odwracalny. □

Wprowadzimy teraz ważne pojęcie radykału algebry Banacha.

Definicja 2.2.7. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha. Radykał A definiujemy jako

$$\mathrm{rad}(A) = \bigcap\{M : M \in \mathrm{Max}(A)\} = \bigcap\{\ker\varphi : \varphi \in \mathfrak{M}(A)\},$$

przy naturalnej konwencji $\mathrm{rad}(A) = A$, gdy $\mathfrak{M}(A) = \emptyset$. Z definicji, jest to domknięty ideał w A. Algebrę A nazywamy półprostą, gdy $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$ oraz radykalną, gdy $\mathrm{rad}(A) = A$.

Ze Stwierdzenia 2.2.4 wynika charakteryzacja elementów należących do radykału.

Fakt 2.2.8. *Niech A będzie zespoloną algebra Banacha. Element $x \in A$ należy do $\mathrm{rad}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r(x) = 0$. Algebra A jest więc półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy warunek $r(x) = 0$ pociąga za sobą $x = 0$.*

Algebry półproste mają wielce użyteczną własność *automatycznej ciągłości.*

Twierdzenie 2.2.9. *Niech A i B będą zespolonymi, przemiennymi algebrami Banacha oraz załóżmy, że B jest półprosta. Wówczas każdy homomorfizm $\phi : A \mapsto B$ jest ciągły.*

Dowód. Z twierdzenia o wykresie domkniętym i liniowości wystarczy pokazać, że jeśli ciąg $x_n \in A$ spełnia $x_n \to 0$ oraz $\phi(x_n) \to b$ dla pewnego $b \in B$, to $b = 0$. Weźmy $\varphi \in \mathfrak{M}(B)$. Wówczas $\varphi \circ \phi \in \mathfrak{M}(A) \cup \{0\}$, a więc zarówno φ jak i $\varphi \circ \phi$ są ciągłe. Stąd

$$\varphi(b) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\phi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (\varphi \circ \phi)(x_n) = 0.$$

Teraz półprostota B zapewnia, iż $b = 0$. $\square$

Wniosek 2.2.10. *Na półprostej algebrze Banacha wszystkie zupełne, podmultiplikatywne normy są równoważne.*

Dowód. Stosujemy poprzednie twierdzenie do odwzorowania identycznościowego naszej algebry z dowolnymi dwiema normami takimi, jak w założeniu. $\square$

Na koniec udowodnimy nieco inną charakteryzację elementów należących do radykału, którą można się posłużyć przy definiowaniu tego ważnego pojęcia także w przypadku algebr nieprzemiennych.

Twierdzenie 2.2.11. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha z jedynką. Element $x \in A$ należy do $\mathrm{rad}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y \in A$ mamy $e + xy \in G(A)$.*

Dowód. Jeśli $x \in \mathrm{rad}(A)$, to dla dowolnego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ i dowolnego $y \in A$ mamy (korzystając na przykład z Faktu 2.2.8)

$$\varphi(e + xy) = \varphi(e) + \varphi(x)\varphi(y) = 1.$$

Zatem element $e + xy$ jest odwracalny (Stwierdzenie 2.2.4). Jeżeli $x \notin \mathrm{rad}(A)$, to istnieje funkcjonał $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(A)$ taki, że $\alpha = \varphi_0(x) \neq 0$. Stąd

$$\varphi_0\left(e + \left(-\frac{e}{\alpha}\right)x\right) = 0$$

i element $e + \left(-\frac{e}{\alpha}\right)x$ nie jest odwracalny w A. $\square$

2.3 Transformacja Gelfanda

Badaliśmy ostatnio zbiór $\mathfrak{M}(A) = \mathrm{Max}(A)$ maksymalnych ideałów modularnych przemiennej, zespolonej algebry Banacha A lub równoważnie zbiór funkcjonałów liniowo - multiplikatywnych na A. Wprowadzimy teraz kluczowe pojęcie *transformaty Gelfanda* elementu przemiennej algebry Banacha oraz *topologii Gelfanda* na przestrzeni ideałów maksymalnych.

Definicja 2.3.1. Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha oraz niech $x \in A$. Określamy transformatę Gelfanda elementu x jako odwzorowanie $\widehat{x} : \mathfrak{M}(A) \mapsto \mathbb{C}$ zadane wzorem

$$\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x) \text{ dla } \varphi \in \mathfrak{M}(A).$$

Przyjmijmy $\widehat{A} = \{\widehat{x} : x \in A\}$. Topologią Gelfanda na $\mathfrak{M}(A)$ (przestrzeni ideałów maksymalnych) nazywamy słabą topologię indukowaną na tym zbiorze przez $\widehat{A}$, czyli najsłabszą topologię, przy której wszystkie $\widehat{x}$ są ciągłe. Ponieważ funkcjonały liniowo - multiplikatywne są ciągłe (zobacz Wniosek 1.4.6) jest to obcięcie słabej* topologii z A^* do $\mathfrak{M}(A)$, a więc dla ustalonego $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(A)$ zadana jest ona przez bazę otoczeń postaci

$$U(\varphi_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathfrak{M}(A) : |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

gdzie $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_1, \ldots, x_n$ są dowolnymi elementami A. Terminem transformacja Gelfanda będziemy określać odwzorowanie $\Gamma_A : A \mapsto C(\mathfrak{M}(A))$ określone wzorem

$$\Gamma_A(x) = \widehat{x}.$$

Przy tym oznaczeniu mamy $\Gamma_A(A) = \widehat{A}$.

Przechodzimy do najważniejszego twierdzenia tego podrozdziału.

Twierdzenie 2.3.2. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha. Wówczas*

1. $\mathfrak{M}(A)$ *jest przestrzenią lokalnie zwartą.*
2. $\mathfrak{M}(A_e) = \mathfrak{M}(A) \cup \{\varphi_\infty\}$ *jest jednopunktowym uzwarceniem* $\mathfrak{M}(A)$.
3. $\mathfrak{M}(A)$ *jest zwarta, jeśli A ma jedynkę.*

Dowód. Zaczniemy od punktu 3. Niech $B = \{\Lambda \in A^* : ||\Lambda||_{A^*} \leqslant 1\}$ będzie domkniętą kulą jednostkową w A^*. Wówczas ze Stwierdzenia 1.4.4 wynika, że $\mathfrak{M}(A) \subset B$. Ponadto z Twierdzenia Banacha - Alaoglu B jest zbiorem zwartym w słabej* topologii, więc wystarczy wykazać, iż $\mathfrak{M}(A)$ jest słabo* domkniętym podzbiorem B. Niech φ_0 należy do tego domknięcia. Należy wykazać dwie tożsamości (druga z nich jest potrzebna, aby otrzymać niezerowość funkcjonału)

$$\varphi_0(xy) = \varphi_0(x)\varphi_0(y) \text{ dla } x, y \in A, \tag{2.1}$$

$$\varphi_0(e) = 1. \tag{2.2}$$

Ustalmy $x, y \in A$ oraz $\varepsilon > 0$ i rozważmy

$$U = \{\Lambda \in A^* : |\Lambda z_i - \varphi_0(z_i)| < \varepsilon \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant 4\},$$

gdzie $z_1 = e$, $z_2 = x$, $z_3 = y$ oraz $z_4 = xy$. Wówczas U jest słabym* otoczeniem φ_0, a więc z definicji zawiera pewien funkcjonał liniowo - multiplikatywny φ. Stąd

$$|1 - \varphi_0(e)| = |\varphi(e) - \varphi_0(e)| < \varepsilon,$$

co implikuje (2.2). Dla dowodu pierwszej tożsamości zauważmy, że

$$\begin{aligned}\varphi_0(xy) - \varphi_0(x)\varphi_0(y) &= [\varphi_0(xy) - \varphi(xy)] + [\varphi(x)\varphi(y) - \varphi_0(x)\varphi_0(y)] = \\ &= [\varphi_0(xy) - \varphi(xy)] + [\varphi(y) - \varphi_0(y)]\varphi(x) + [\varphi(x) - \varphi_0(x)]\varphi_0(y).\end{aligned}$$

W ten sposób dostajemy nierówność

$$|\varphi_0(xy) - \varphi_0(x)\varphi_0(y)| < (1 + ||x|| + |\varphi_0(y)|)\varepsilon,$$

która dowodzi (2.1).
Przejdźmy teraz do dowodu punktu 1. Rozważamy $\mathfrak{M}(A_e)$ mając na uwadze inkluzję $\mathfrak{M}(A) \subset \mathfrak{M}(A_e)$. Przez U oraz U_e będziemy oznaczać otoczenia bazowe w $\mathfrak{M}(A)$ oraz $\mathfrak{M}(A_e)$ (odpowiednio). Wówczas, dla $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$, $\varepsilon > 0$ oraz F - skończonego podzbioru A mamy

$$U_e(\varphi, F, \varepsilon) = \begin{cases} U(\varphi, F, \varepsilon) \cup \{\varphi_\infty\} \text{ jeśli } |\varphi(x)| < \varepsilon \text{ dla wszystkich } x \in F \\ U(\varphi, F, \varepsilon) \text{ w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Stąd topologia Gelfanda na $\mathfrak{M}(A)$ zgadza się z topologią Gelfanda indukowaną z $\mathfrak{M}(A_e)$. Zbiór jednopunktowy $\{\varphi_\infty\}$ jest oczywiście domknięty w $\mathfrak{M}(A_e)$, a więc $\mathfrak{M}(A)$ jest otwarte w $\mathfrak{M}(A_e)$, czyli jest lokalnie zwarte.
Dla dowodu punktu 2. niech $x \in A$ oraz $\varepsilon > 0$. Wówczas

$$\begin{aligned}U_e(\varphi_\infty, x, \varepsilon) &= \{\varphi_\infty\} \cup \{\varphi \in \mathfrak{M}(A) : |\varphi(x)| < \varepsilon\} = \\ &= \mathfrak{M}(A_e) \setminus \{\psi \in \mathfrak{M}(A_e) : |\psi(x)| \geqslant \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Zbiory $\{\psi \in \mathfrak{M}(A_e) : |\psi(x)| \geqslant \varepsilon\}$, $x \in A$ są domknięte w $\mathfrak{M}(A_e)$, a więc zwarte. Teraz, dopełnienie każdego otoczenia bazowego φ_∞ jest skończoną sumą takich zbiór zwartych, czyli jest zwarte, a ponadto

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}(A_e) \setminus U_e(\varphi_\infty, x, \varepsilon) = \\ &= \mathfrak{M}(A_e) \setminus (\{\varphi_\infty\} \cup \{\varphi \in \mathfrak{M}(A) : |\varphi(x)| < \varepsilon\}) = \\ &= \mathfrak{M}(A) \setminus \{\varphi \in \mathfrak{M}(A) : |\varphi(x)| < \varepsilon\}.\end{aligned}$$

□

W następnym twierdzeniu podsumujemy podstawowe własności transformacji Gelfanda.

Twierdzenie 2.3.3. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha i $\Gamma : A \mapsto C(\mathfrak{M}(A))$ jej transformacją Gelfanda. Wówczas*

1. *Γ przekształca A w $C_0(\mathfrak{M}(A))$ i nie zwiększa normy.*
2. *Γ jest homomorfizmem A w $C_0(\mathfrak{M}(A))$ o jądrze* $\mathrm{rad}(A)$.
3. *$\Gamma(A) = \widehat{A}$ silnie rozdziela punkty $\mathfrak{M}(A)$.*
4. *Dla każdego $x \in A$ zachodzi*

$$\sigma(x) \setminus \{0\} \subset \widehat{x}(\mathfrak{M}(A)) \subset \sigma(x).$$

Ponadto, jeśli A ma jedynkę to zachodzi $\widehat{x}(\mathfrak{M}(A)) = \sigma(x)$.

Dowód. Od razu widzimy, że punkt 4. jest przeformułowaniem Stwierdzenia w języku transformaty Gelfanda. Dla dowodu punktu 1. użyjemy poprzedniego twierdzenia, z którego wiemy, iż $\mathfrak{M}(A_e)$ jest jednopunktowym uzwarceniem $\mathfrak{M}(A)$ oraz $\widehat{x}(\varphi_\infty) = 0$, co implikuje $\widehat{x} \in C_0(\mathfrak{M}(A))$. Co więcej, z ogólnych własności promienia spektralnego mamy

$$||\widehat{x}||_\infty = r(x) \leqslant ||x||.$$

Dowód punktu 2. jest natychmiastowy z definicji, więc go pominiemy. Punkt 3. oznacza, że $\Gamma(A)(\varphi) \neq \{0\}$ dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ oraz jeśli $\varphi_1 \neq \varphi_2$, to $\widehat{x}(\varphi_1) \neq \widehat{x}(\varphi_2)$ dla pewnego $x \in A$. □

Zastanowimy się teraz, kiedy $\widehat{A}$ jest domknięte w $C_0(\mathfrak{M}(A))$. Potrzebny będzie lemat pomocniczy.

Lemat 2.3.4. *Jeśli A jest zespoloną, przemienną algebrą Banacha i określimy liczby r oraz s za pomocą wzorów*

$$r = \inf \frac{||x^2||}{||x||^2}, \ s = \inf \frac{||\widehat{x}||_\infty}{||x||} \ x \in A, \ x \neq 0,$$

to $s^2 \leqslant r \leqslant s$.

Dowód. Z definicji $||\widehat{x}||_\infty \geqslant s||x||$, a więc

$$||x^2|| \geqslant ||\widehat{x}^2||_\infty = ||\widehat{x}||_\infty^2 \geqslant s^2||x||^2$$

dla każdego $x \in A$, czyli $s^2 \leqslant r$. Ponieważ $||x^2|| \geqslant r||x||^2$ dla każdego $x \in A$, indukcja ze względu na n pokazuje, że

$$||x^{2^n}|| \geqslant r^{2^n - 1}||x||^{2^n}.$$

Przykładając obustronnie pierwiastek stopnia 2^n w tej nierówności i przechodząc do granicy otrzymujemy, w oparciu o wzór na promień spektralny,

$$r(x) = ||\widehat{x}||_\infty \geqslant r||x||,$$

co dowodzi nierówności $r \leqslant s$. □

Czas na zapowiadane twierdzenie.

Twierdzenie 2.3.5. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha. Wówczas zachodzą następujące fakty.*

1. *Transformacja Gelfanda jest izometrią (czyli $||x|| = ||\widehat{x}||_\infty$ dla każdego $x \in A$) wtedy i tylko wtedy, gdy $||x^2|| = ||x||^2$ dla wszystkich $x \in A$.*

2. *A jest półprosta i $\widehat{A}$ jest domknięta w $C_0(\mathfrak{M}(A))$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $K < \infty$ takie, że $||x||^2 \leqslant K||x^2||$ dla każdego $x \in A$.*

Dowód. Dla dowodu punktu 1. wystarczy zauważyć, że transformacja Gelfanda jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy s z poprzedniego lematu jest równe 1, co na mocy tezy tegoż samego lematu zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $r = 1$. Istnienie K jest równoważne warunkowi $r > 0$, skąd na mocy tezy lematu wnioskujemy $s > 0$. Jeśli $s > 0$, to transformacja Gelfanda spełnia $||\widehat{x}||_\infty \geqslant s||x||$ jest więc włożeniem, co pociąga za sobą różnowartościowość oraz domkniętość obrazu. W drugą stronę, jeśli $x \mapsto \widehat{x}$ jest różnowartościowe oraz $\widehat{A}$ jest domknięte w $C_0(\mathfrak{M}(A))$, to klasyczny wniosek z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym implikuje, że $s > 0$. □

Odnotujmy jeszcze ważną własność promienia spektralnego w algebrach przemiennych.

Stwierdzenie 2.3.6. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha. Wówczas promień spektralny jest półnormą na A. Dodatkowo, promień spektralny jest normą wtedy i tylko wtedy, gdy A jest półprosta.*

Dowód. Promień spektralny jest z definicji nieujemnym, dodatnio jednorodnym funkcjonałem na A. Sprawdzimy nierówność trójkąta

$$r(x + y) = ||\widehat{x + y}||_\infty = ||\widehat{x} + \widehat{y}||_\infty \leqslant ||\widehat{x}||_\infty + ||\widehat{y}||_\infty = r(x) + r(y)$$

dla dowolnych $x, y \in A$, co dowodzi pierwszej części stwierdzenia. Dla dowodu części drugiej stosujemy punkt 2. Twierdzenia 2.3.3: $r(x) = 0 \Leftrightarrow ||\widehat{x}||_\infty = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{rad}(A)$. □

Transformacja Gelfanda jest z oczywistych przyczyn narzędziem do badania algebr przemiennych. Tym nie mniej, okazuje się, że często można jej użyć także w przypadku nieprzemiennym, czego przykład zobaczymy za chwilę.

Definicja 2.3.7. Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz $S \subset A$. Komutantem S nazywamy zbiór

$$S' = \{x \in A : xs = sx \text{ dla każdego } s \in S\}.$$

Mówimy, ze S komutuje, jeśli każde dwa elementy S są ze sobą przemienne.

Następny fakt opisuje podstawowe własności komutantów.

Fakt 2.3.8. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz $S \subset A$.*

1. *S' jest domkniętą podalgebrą z jedynką w A.*

2. *$S \subset S'' := (S')'$.*

3. *Jeśli S komutuje, to S'' komutuje.*

Dowód. Pierwsza część jest łatwa, gdyż jeśli $x, y \in A$ komutują z każdym $s \in S$, to tę własność mają także λx, $x + y$ oraz xy, $\lambda \in \mathbb{C}$. Domkniętość wynika z ciągłości mnożenia. Z definicji, każdy $s \in S$ komutuje z każdym $x \in S'$, a więc $S \subset S''$. Jeśli S komutuje, to $S \subset S'$, a zatem $S'' \subset S'$. To kończy dowód trzeciej części, gdyż dla dowolnego zbioru $E \subset A$, jeśli $E' \subset E$, to E' komutuje, bo wówczas $E' \subset E''$. □

Komutanty pozwalają sprowadzić niektóre zagadnienia ogólne do przypadku przemiennego.

Twierdzenie 2.3.9. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką, $S \subset A$, S komutuje i przyjmijmy $B = S''$. Wówczas B jest przemienną podalgebrą Banacha z jedynką w A, $S \subset B$ oraz $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ dla każdego $x \in B$.*

Dowód. Z poprzedniego faktu wiemy, że B ma żądane własności. Weźmy $x \in B$ o własności $x \in G(A)$. Trzeba pokazać, iż $x^{-1} \in B$. Skoro $x \in B$, to z definicji $xy = yx$ dla każdego $y \in S'$. Zatem $y = x^{-1}yx$, czyli $yx^{-1} = x^{-1}y$, a więc $x^{-1} \in B$. □

Twierdzenie 2.3.10. *Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką, $x, y \in A$ oraz $xy = yx$. Wówczas*

$$\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y) \ \sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y).$$

Dowód. Przyjmijmy $S = \{x, y\}$ oraz $B = S''$. Wtedy $x + y, xy \in B$ i na mocy poprzedniego twierdzenia wystarczy wykazać, że

$$\sigma_B(x+y) \subset \sigma_B(x) + \sigma_B(y), \ \sigma_B(xy) \subset \sigma_B(x)\sigma_B(y).$$

Jednak B jest przemienna, a więc spektrum dowolnego elementu jest obrazem jego transformaty Gelfanda i teza wynika z relacji

$$\widehat{(x+y)} = \widehat{x} + \widehat{y} \text{ i } \widehat{(xy)} = \widehat{x}\widehat{y}.$$

□

Zanim przejdziemy do przykładów udowodnimy proste stwierdzenie, które pozwala w wielu przypadkach zidentyfikować topologię Gelfanda.

Stwierdzenie 2.3.11. *Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą oraz A rodziną funkcji z $C_0(X)$, która silnie rodziela punkty X. Wówczas topologia na X jest identyczna ze słabą topologią zadawaną przez rodzinę funkcji $x \mapsto f(x)$, $f \in A$.*

Dowód. Topologia na X jest silniejsza niż słaba topologia. Wystarczy więc wykazać, że dla ustalonego $x \in X$ i otoczenia U punktu x w X istnieje V o własności $x \in V \subset U$, gdzie V jest otwarty w słabej topologii. Przyjmijmy $\widetilde{X} = X$, gdy X jest zwarte oraz $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ (jednopunktowe uzwarcenie) w przeciwnym wypadku. Każda $f \in C_0(X)$ rozszerza się na $\widetilde{X}$ poprzez określenie $f(\infty) = 0$. Skoro A silnie rodziela punkty X, to dla każdego $y \in \widetilde{X} \setminus U$ istnieje $f_y \in A$ takie, że

$$\varepsilon_y = |f_y(y) - f_y(x)| > 0.$$

Dla każdego $y \in \widetilde{X} \setminus U$ zbiór

$$V_y = \{z \in \widetilde{X} : |f_y(z) - f_y(y)| < \frac{\varepsilon_y}{2}\}$$

jest otwartym otoczeniem y w $\widetilde{X}$ (w słabej topologii). Ponieważ $\widetilde{X} \setminus U$ jest zwarte, to istnieje skończenie wiele $y_1, \ldots, y_n \in \widetilde{X} \setminus U$ takich, że

$$\widetilde{X} \setminus U \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}.$$

Przyjmijmy

$$V = \{z \in X : |f_{y_j}(z) - f_{y_j}(x)| < \frac{\varepsilon_{y_j}}{2} \text{ dla wszystkich } 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Wtedy $x \in V$ oraz V jest zawarte w U. Rzeczywiście, gdyby pewne $z \in V$ i $z \notin U$, to $z \in V_{y_j}$ dla pewnego j, a stąd

$$|f_{y_j}(x) - f_{y_j}(y_j)| \leqslant |f_{y_j}(x) - f_{y_j}(z)| + |f_{y_j}(z) - f_{y_j}(y_j)| < \varepsilon_{y_j},$$

co przeczy definicji ε_{y_j}. $\square$

Czas teraz dokładnie przeanalizować poznane wcześniej przykłady.

Przykład 2.3.12.

1. Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą. Wówczas $\mathfrak{M}(C_0(X)) = X$ oraz transformata Gelfanda $f \in C_0(X)$ jest postaci $\widehat{f}(x) = f(x)$ dla $x \in X$. Zatem transformacja Gelfanda jest w tym przypadku identycznością.

2. $\mathfrak{M}(L^1(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$. Transformata Gelfanda $f \in L^1(\mathbb{R})$ jest postaci

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-ixy}dy \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

W tym przypadku transformacja Gelfanda jest tożsama z transformacją Fouriera.

3. $\mathfrak{M}(L^1(\mathbb{T})) = \mathbb{Z}$. Transformata Gelfanda $f \in L^1(\mathbb{T})$ jest postaci

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \text{ dla } n \in \mathbb{Z}.$$

W tym przypadku również transformacja Gelfanda pokrywa się z transformacją Fouriera.

4. $\mathfrak{M}(l^1(\mathbb{Z})) = \mathbb{T}$. Transformata Gelfanda $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in l^1(\mathbb{Z})$ jest postaci

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \text{ dla } t \in \mathbb{T}.$$

Dowód. Postacie transformat Gelfanda wynikają z Przykładu 1.4.10. Identyfikacje topologii na przestrzeniach Gelfanda z naturalnymi topologiami na $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{T}$ wynikają ze stwierdzenia poprzedzającego przykład (w dwóch środkowych przypadkach opieramy się na lemacie Riemanna - Lebesgue'a). Inną metodą jest dodanie jedynki, w przypadkach gdy rozpatrywana algebra jej nie posiada, a następnie oparcie się na fakcie:
jeśli (X, τ_2) jest przestrzenią zwartą oraz τ_1 jest topologią Hausdorffa na X, taką że $\tau_1 \subset \tau_2$, to $\tau_1 = \tau_2$ (u nas τ_2 to naturalna topologia, a τ_1 to topologia Gelfanda). □

Na zakończenie tego podrozdziału omówimy jeszcze jedną ważną algebrę.

Przykład 2.3.13. Każdy funkcjonał liniowo - multiplikatywny na algebrze $A(\mathbb{D})$ jest postaci

$$\varphi(f) = f(z) \text{ dla pewnego } z \in \mathbb{D}.$$

Stąd $\mathfrak{M}(A(\mathbb{D})) = \mathbb{D}$ i transformacja Gelfanda jest identycznością.

Dowód. Niech $f_0 \in A(\mathbb{D})$ będzie zadana wzorem $f_0(t) = t$. Weźmy $\varphi \in \mathfrak{M}(A(\mathbb{D}))$ i oznaczmy $\varphi(f_0) = z$. Musi być $|z| \leqslant 1$, bo inaczej $f_0 - ze$ byłoby elementem odwracalnym i otrzymalibyśmy

$$\varphi((f_0 - ze)^{-1}) = (\varphi(f_0 - ze))^{-1} = (\varphi(f_0) - z)^{-1},$$

co jest wykluczone. Dla dowolnego wielomianu w mamy teraz $\varphi(w) = w(z)$, skąd $\varphi(f) = f(z)$ dla dowolnej funkcji $f \in A(\mathbb{D})$, o ile wiemy, że wielomiany są gęste w tej algebrze, gdyż funkcjonały liniowo - multiplikatywne są ciągłe. Uzasadnimy jeszcze to ostatnie zdanie. Dla $f \in A(\mathbb{D})$ i $0 < t < 1$ rozważmy funkcje $f_t(z) = f(tz)$. Wówczas każda z funkcji f_t jest holomorficzna w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{t}\}$, a ponadto $f_t \to f$ jednostajnie na $\mathbb{D}$, gdy $t \to 1$, co wynika z jednostajnej ciągłości f. Ponadto, każda z funkcji f_t może być jednostajnie przybliżana wielomianami na $\mathbb{D}$, ponieważ ma ona w tym zbiorze rozwinięcie na szereg potęgowy. □

2.4 Uproszczony rachunek funkcyjny

Definicja 2.4.1. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką oraz niech f będzie funkcją holomorficzną określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{C}$. Mówimy, że funkcja f działa na element $x \in A$, jeśli $\sigma(x) \subset D$ i $f \circ \widehat{x} \in \widehat{A}$.

Widzimy bez trudu, że każda funkcja całkowita działa na dowolnym elemencie algebry Banacha. Istotnie, jeśli napiszemy

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n,$$

to podstawiając za λ dowolny element x algebry A otrzymamy szereg zbieżny w algebrze A do pewnego elementu y, a ponadto

$$\widehat{y}(\varphi) = \varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x)^n = f(\varphi(x)) = f(\widehat{x}(\varphi)).$$

Naszym celem jest rozszerzenie tego wyniku na większą klasę funkcji.

Twierdzenie 2.4.2. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką i niech f będzie funkcją holomorficzną na zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{C}$. Wówczas funkcja f działa na każdy element $x \in A$ taki, że $\sigma(x) \subset \Omega$. Innymi słowy, dla każdego takiego elementu $x \in A$ istnieje $y \in A$ takie, że*

$$\varphi(y) = f(\varphi(x)) \text{ dla każdego } \varphi \in \mathfrak{M}(A) \tag{2.3}$$

Dowód. Niech x będzie ustalonym elementem algebry A takim, że $\sigma(x) \subset \Omega$. Ponieważ $\sigma(x)$ jest zwarte i składowe zbioru Ω pokrywają to widmo, pokrywa je również skończenie wiele składowych, czyli możemy założyć, iż Ω ma skończenie wiele składowych. Odległość zbioru $\sigma(x)$ od $\mathbb{C} \setminus \Omega$ jest dodatnia, więc możemy dobrać skończony układ γ_i, $i = 1, \dots, n$ prostowalnych łuków zamkniętych ograniczających podzbiór otwarty $\Omega_0 \subset \Omega$ zawierający widmo $\sigma(x)$. Funkcja f wyraża się w zbiorze Ω_0 wzorem Cauchy'ego

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \xi} d\lambda.$$

Podstawiając w miejsce zmiennej ξ element x otrzymamy pewien element y algebry A

$$y = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Całka ta jest określona, gdyż funkcja $g(\lambda) = f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}$ jest ciągła na każdej krzywej γ_k. Mamy też

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \varphi[f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}] d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \varphi(x)} d\lambda = f(\varphi(x)),$$

przy każdym $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$, gdyż krzywe γ_k otaczają $\sigma(x)$ oraz $\varphi(x) \in \sigma(x)$. W ten sposób udowodniliśmy relację (2.3). $\square$

Działanie jest zdefiniowane w terminach funkcjonałów liniowo - multiplikatywnych (transformaty Gelfanda) elementu, a więc jego wynik jest zdefiniowany jednoznacznie z dokładnością do elementów należących do radykału.

Uwaga 2.4.3. Element y jest wyznaczony jednoznacznie przez element x poprzez relację (2.3) wtedy i tylko wtedy, gdy algebra jest półprosta.

Każdy element będący wynikiem opisanego w Twierdzeniu 2.4.2 działania będziemy oznaczać przez $f(x)$. Metoda obliczania tego elementu zwana jest *rachunkiem funkcyjnym.* Należałoby teraz zadać sobie pytania z serii: czy dobór krzywych γ_i jest istotny? Jakie są własności odwzorowania $x \mapsto f(x)$? Odpowiedzią na nie zajmiemy się później, a teraz przejdziemy do zastosowań. Pierwsze z nich to uogólnienie Twierdzenia Wienera.

Twierdzenie 2.4.4 (Wiener-Levy)**.** *Niech $g \in A(\mathbb{T})$ oraz niech f będzie funkcją holomorficzną w zbiorze otwartym zawierającym $g(\mathbb{T})$. Wówczas $f \circ g \in A(\mathbb{T})$.*

Dowód. W dowodzie Twierdzenia Wienera uzasadniliśmy, że $\sigma(g) = g(\mathbb{T})$ tak więc teza wynika z twierdzenia o rachunku funkcyjnym. □

Drugim (i na razie ostatnim) będzie prosty dowód klasycznego Twierdzenia Rungego.

Twierdzenie 2.4.5 (Runge)**.** *Niech K będzie zwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej. Wówczas każda funkcja analityczna w otoczeniu K może być aproksymowana jednostajnie na K za pomocą funkcji wymiernych z biegunami poza K. Co więcej, jeśli S jest dowolnym podzbiorem dopełnienia K, który zawiera przynajmniej jeden punkt z każdej ograniczonej składowej dopełnienia K, to do aproksymacji wystarczą funkcje wymierne o biegunach w S. W szczególności, jeśli dopełnienie K jest spójne, to każdą funkcję analityczną w otoczeniu K można na K przybliżać jednostajnie wielomianami.*

Dowód. Niech $\widetilde{R(K)}$ będzie domkniętą podalgebrą $C(K)$ generowaną przez funkcje wymierne o biegunach zawartych w zbiorze S. Funkcja identycznościowa z należy do $\widetilde{R(K)}$ i ma spektrum równe zbiorowi K w $C(K)$, bo $(\lambda - z)^{-1}$ należy do $C(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda \notin K$. Z *abstrakcyjnego twierdzenia Rungego* ma ona identyczne spektrum w $\widetilde{R(K)}$. Weźmy funkcję f - analityczną w otoczeniu K i zadziałajmy nią na tę funkcję. Wówczas $f(z) \in \widetilde{R(K)}$ oraz $\widehat{f(z)} = f \circ \widehat{z}$ (z definicji działania). Oznacza to, że dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(\widetilde{R(K)})$ zachodzi

$$\varphi(f(z)) = f(\varphi(z)).$$

Dla każdego $t \in K$ możemy określić $\varphi_t \in \mathfrak{M}(\widetilde{R(K)})$ wzorem

$$\varphi_t(g) = g(t) \text{ dla } g \in \widetilde{R(K)}.$$

Zatem, dla każdego $t \in K$ mamy

$$f(z)(t) = f(\varphi_t(z)) = f(t),$$

czyli $f(z) \equiv f$, co kończy dowód pierwszej części. Jeśli dopełnienie K jest spójne, to nie ma ograniczonych składowych dopełnienia K, więc za S można wziąć zbiór pusty. □

Rozdział 3

Algebry Banacha z inwolucją

3.1 Inwolucje

Definicja 3.1.1. Odwzorowanie $x \mapsto x^*$ z algebry zespolonej A w siebie nazywamy inwolucją, jeśli posiada ona następujące własności dla wszystkich $x, y \in A$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} (x+y)^* &= x^* + y^*, \\ (\lambda x)^* &= \overline{\lambda} x^*, \\ (xy)^* &= y^* x^*, \\ x^{**} &= x. \end{aligned}$$

Jeśli dodatkowo A jest algebrą Banacha, to parę składającą się z A i inwolucji nazywamy algebrą Banacha z inwolucją (*-algebrą Banacha).

Podamy kilka przykładów.

Przykład 3.1.2.

1. Dla $f \in L^1(\mathbb{T})$ określamy inwolucję wzorem $\widetilde{f}(t) = \overline{f(-t)}$.
2. Dla $\mu \in M(\mathbb{T})$ określamy inwolucję wzorem $\widetilde{\mu}(E) = \overline{\mu(-E)}$ dla $E \subset \mathbb{T}$ borelowskich.
3. Dla $f \in C_0(X)$ określamy inwolucję wzorem $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$.
4. Dla $T \in B(H)$ określamy inwolucję jako operację brania operatora sprzężonego.

Uwaga 3.1.3. Jeśli A jest *-algebrą Banacha bez jedynki, to inwolucję możemy rozserzyć na A_e nadając jej strukturę *-algebry Banacha za pomocą wzoru

$$(\lambda e + x)^* = \overline{\lambda} e + x^* \text{ dla } \lambda \in \mathbb{C} \text{ oraz } x \in A.$$

W oparciu o przykład algebry $B(H)$ wprowadzamy definicje elementów o szczególnych własnościach.

Definicja 3.1.4. Niech A będzie *-algebrą Banacha oraz $x \in A$.

1. Jeśli zachodzi $x = x^*$, to element x nazywamy hermitowskim lub samosprzężonym.
2. Jeśli zachodzi $xx^* = x^*x$, to element x nazywamy normalnym.
3. Jeśli zachodzi $xx^* = x^*x = e$, to element x nazywamy unitarnym (zakładamy w tym punkcie, że A ma jedynkę)

Zacznijmy od prostego stwierdzenia.

Stwierdzenie 3.1.5. *Jeśli A jest algebrą Banacha z inwolucją i $x \in A$, to*

1. *$x + x^*$, $i(x - x^*)$ oraz xx^* są hermitowskie,*
2. *x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = u + iv$, gdzie $u, v \in A$ są hermitowskie.*
3. *gdy A ma jedynkę, to jest ona hermitowska,*
4. *x jest odwracalny w A wtedy i tylko wtedy, gdy x^* jest odwracalny w A i wówczas $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.*
5. *$\lambda \in \sigma(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\lambda} \in \sigma(x^*)$*

Dowód. Część 1. jest oczywista. Dla dowodu punktu 2. niech $2u = x + x^*$ oraz $2v = i(x^* - x)$. Wówczas $x = u + iv$ jest żądanym przedstawieniem. Przypuśćmy teraz, że $x = u' + iv'$ dla pewnych hermitowskich u', v'. Przyjmijmy $w = v' - v$. Wtedy zarówno w, jak i iw są hermitowskie, a więc

$$iw = (iw)^* = -iw^* = -iw,$$

czyli $w = 0$ i jednoznaczność jest udowodniona. Ze względu na równość $e^* = ee^*$ punkt 1. pociąga za sobą punkt 3. Część 4. wynika z części 3. oraz tożsamości $(xy)^* = y^*x^*$. Ostatni punkt wynika teraz z czwartego zastosowanego do $\lambda e - x$. □

Wprost z ostatniego punktu powyższego stwierdzenia otrzymujemy przydatny wniosek.

Wniosek 3.1.6. *Jeśli A jest *-algebrą Banacha, to dla każdego $x \in A$ zachodzi*

$$r(x) = r(x^*).$$

Nie zakładaliśmy, że rozważana inwolucja jest ciągła. Okazuje się, iż to założenie jest automatycznie spełnione, gdy nasza algebra jest przemienna i półprosta.

Stwierdzenie 3.1.7. *Niech A będzie przemienną, półprostą algebrą Banacha. Wówczas każda inwolucja na A jest ciągła.*

Dowód. Niech $||\cdot||$ oznacza wyjściową normę na A. Określmy nową normę $|\cdot|$ na algebrze A za pomocą wzoru $|x| = ||x^*||$. Sprawdzamy bez trudu, że jest to norma podmultiplikatywna. Jeśli $x_n \in A$ jest ciągiem Cauchy'ego w $|\cdot|$, to x_n^* jest ciągiem Cauchy'ego w normie $||\cdot||$, a więc $||x_n^* - x|| \to 0$ dla pewnego $x \in A$. Wynika stąd, że również $|x_n - x^*| \to 0$, czyli $(A, |\cdot|)$ jest zupełna. Z Wniosku 2.2.10 wynika istnienie stałej $c > 0$ o własności

$$||x^*|| = |x| \leqslant c||x||,$$

co kończy dowód. □

Zobaczymy teraz, jak w teorii algebr z inwolucją można badać spektrum elementu za pomocą pewnej przemiennej podalgebry.

Definicja 3.1.8. Niech A będzie algebrą Banacha z inwolucją. Zbiór $S \subset A$ nazwiemy normalnym, gdy S komutuje (każde dwa element z S są ze sobą przemienne) oraz $x \in S$ pociąga za sobą $x^* \in S$.

Twierdzenie 3.1.9. *Niech A będzie *-algebrą Banacha z jedynką, a B jej normalnym podzbiorem, który jest maksymalny ze względu na własność bycia normalnym. Wówczas*

1. *B jest domkniętą, przemienną podalgebrą A,*
2. *$\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ dla każdego $x \in B$.*

Dowód. Najpierw proste kryterium należenia do B: jeśli $x \in A$ jest normalny oraz $xy = yx$ dla każdego $y \in B$, to $x \in B$. Rzeczywiście, wtedy $xy^* = y^*x$ dla wszystkich $y \in B$, bo zbiór B jest normalny i w związku z tym też $x^*y = yx^*$. Wynika stąd, że zbiór $B \cup \{x, x^*\}$ jest normalny, a maksymalność B uzasadnia, iż $x \in B$. W oparciu o to kryterium sprawdzamy bez trudu zamkniętość B na dodawanie i mnożenie, a także posiadanie przez B jedynki, jest zatem B algebrą przemienną. Załóżmy, że $x_n \in B$ oraz $x_n \to x$. Z założenia mamy $x_n y = y x_n$ dla wszystkich $y \in B$, a więc ciągłość mnożenia daje $xy = yx$. Ponadto,

$$x^*y = (y^*x)^* = (xy^*)^* = yx^*.$$

W szczególności $x^*x_n = x_n x^*$, co prowadzi do $x^*x = xx^*$, czyli $x \in B$ na mocy naszego kryterium. W ten sposób zakończyliśmy dowód punktu 1.
Uzasadnienie drugiej części jest znacznie prostsze. Załóżmy, że $x \in B$ oraz $x^{-1} \in A$. Element x jest normalny, a więc normalny jest także x^{-1} i ponieważ x komutuje z każdym $y \in B$, robi to także x^{-1}. Powołując się ponownie na początkowe kryterium dostajemy $x^{-1} \in B$, co kończy dowód. □

Zawęzimy na koniec tego podrozdziału nasze rozważania do pewnych specjalnych klas *-algebr.

Definicja 3.1.10. Niech A będzie *-algebrą Banacha. Powiemy, że A jest algebrą:

1. symetryczną, gdy $\sigma(x^*x) \subset \mathbb{R}_+$ dla każdego $x \in A$,
2. hermitowską, gdy $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$ dla każdego elementu hermitowskiego $x \in A$.

Fakt 3.1.11. *Jeśli A jest symetryczną *-algebrą Banacha, to jest algebrą hermitowską.*

Dowód. Niech $x \in A$ będzie elementem hermitowskim. Wówczas

$$\{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(x)\} =: \sigma(x)^2 = \sigma(x^2) = \sigma(x^*x) \subset \mathbb{R}_+,$$

gdzie druga równość to najprostsza wersja twierdzenia spektralnego, którą każdy może wykazać samodzielnie. Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że liczba zespolona λ spełniająca $\lambda^2 \geqslant 0$ musi być liczbą rzeczywistą. $\square$

Prawdziwa jest również implikacja przeciwna, ale jest to wynik daleki od oczywistości, którego nie będziemy tutaj dowodzić. Zbadamy za to sytuację przemienną.

Twierdzenie 3.1.12. *Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z inwolucją. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

1. *A jest algebrą symetryczną.*
2. *A jest algebrą hermitowską.*
3. *Transformacja Gelfanda jest *-homomorfizmem, czyli*

$$\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} \text{ dla każdego } x \in A \text{ oraz } \varphi \in \mathfrak{M}(A)$$

Dowód. Implikacja 1.⇒2. została wykazana w Fakcie 3.1.11, więc zajmiemy się wynikaniem 2.⇒3. Niech więc $x \in A$. Zapiszmy x w postaci $x = u + iv$, gdzie $u, v \in A$ są hermitowskie jak w Stwierdzeniu 3.1.5. Wówczas $x^* = u - iv$, a więc dla $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ zachodzi

$$\varphi(x^*) = \varphi(u) - i\varphi(v) = \overline{\varphi(u) + i\varphi(v)} = \overline{\varphi(x)}.$$

Implikacja 3.⇒1. jest natychmiastowa, gdyż na mocy założenia

$$\varphi(x^*x) = \varphi(x^*)\varphi(x) = |\varphi(x)|^2 \geqslant 0,$$

a spektrum jest obrazem transformaty Gelfanda elementu. $\square$

3.2 C*-algebry

Definicja 3.2.1. Niech A będzie algebrą Banacha z inwolucją. A nazywamy C^*-algebrą, gdy spełniony jest warunek

$$||x^*x|| = ||x||^2 \text{ dla wszystkich } x \in A.$$

Przykład 3.2.2. Istnieją dokładnie dwa (z dokładnością do brania domkniętych-* podalgebr) przykłady.

1. $C_0(X)$, gdzie X - przestrzeń lokalnie zwarta,
2. $B(H)$, gdzie H - przestrzeń Hilberta.

Uzasadnimy dla porządku, że $B(H)$ jest C^*-algebrą. Rzeczywiście $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$ oraz dla dowolnego $x \in H$ mamy

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (T^*Tx, x) \leqslant \|T^*T\|\|x\|^2.$$

Nie zakładamy, że inwolucja na algebrze A jest ciągła. Jak się jednak okazuje w C^*-algebrach ten warunek jest spełniony automatycznie.

Fakt 3.2.3. *Niech A będzie C^*-algebrą. Wówczas inwolucja na A jest izometrią, to znaczy zachodzi*

$$||x^*|| = ||x|| \textit{ dla wszystkich } x \in A$$

Dowód. Niech $x \in A$. Z warunku C^* oraz podmultiplikatywności normy dostajemy

$$||x||^2 = ||x^*x|| \leqslant ||x^*|| \cdot ||x||,$$

czyli $||x|| \leqslant ||x^*||$, co przez symetrię daje tezę. □

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy jak rozserzyć inwolucję z algebry bez jedynki na algebrę z dołączoną jedynką (zobacz Uwagę 3.1.3). Aby jednak zachować warunek C^* należy postępować znacznie ostrożniej.

Twierdzenie 3.2.4. *Niech A będzie C^*-algebrą bez jedynki. Istnieje wówczas norma $||\cdot||_0$ na A_e taka, że $||a||_0 = ||a||$ dla $x \in A$ oraz $(A_e, ||\cdot||_0)$ jest C^*-algebrą.*

Dowód. Niech $||\cdot||$ oznacza standardową normę na A_e, tzn.

$$||a + \lambda e|| = ||a|| + |\lambda| \text{ dla } a \in A \text{ oraz } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dla $x \in A_e$ określmy operator liniowy $L_x : A \mapsto A$ wzorem $L_x(a) = xa$ dla $a \in A$. Wówczas oczywiście

$$||L_x a|| \leqslant ||x|| \cdot ||a||,$$

a więc L_x jest ograniczony i $||L_x|| \leqslant ||x||$. Uzasadnimy, że $||x||_0 := ||L_x||$ jest normą rozszerzającą normę na A oraz czyniącą z A_e C^*-algebrę. Zauważmy na początek, że dla $a \in A$ mamy

$$||L_a(a^*)|| = ||aa^*|| = ||a||^2 = ||a|| \cdot ||a^*||$$

Teraz

$$||L_a|| \geqslant ||L_a\left(\frac{a^*}{||a^*||}\right)|| = ||a||,$$

co w połączeniu z poprzednią nierównością daje $||a||_0 = ||L_a|| = ||a||$ dla $a \in A$, a więc funkcja $x \mapsto ||x||_0$ rozszerza normę z A. Podobnie jak na samym początku naszego wykładu (zobacz Twierdzenie 1.1.5) sprawdzamy, że rozważana funkcja jest półnormą podmultiplikatywną na A_e. Trzeba wykazać, że jest to norma. Niech więc $x \in A_e$ spełnia $L_x = 0$. W takim razie

$$x = b + \lambda e \text{ dla pewnych } b \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}$$

ma własność $xa = 0$ dla każdego $a \in A$. Jeśli $\lambda \neq 0$, to z postaci x oraz wymienionej własności dostajemy

$$a = \left(-\frac{1}{\lambda}b\right) a \text{ dla wszystkich } a \in A.$$

Zatem element $u = -(\frac{1}{\lambda})b$ jest lewostronną jedynką dla A. Skoro

$$u^* = uu^* = (uu^*)^* = (u^*)^* = u$$

to dla każdego $a \in A$ mamy

$$au = au^* = (ua^*)^* = (a^*)^* = a,$$

a stąd u jest również jedynką prawostronną dla A. Ta sprzeczność uzasadnia, że $x = b \in A$, a więc $x = 0$, bo $||b|| = ||L_b||$, co wykazaliśmy wcześniej. Zupełności naszej normy możemy dowodzić tak samo jak w Twierdzeniu 1.1.5 lub ograniczyć się do uwagi, iż A jest zupełna oraz A_e/A jest jednowymiarowa. Sprawdzimy teraz warunek C^* na A_e. Niech $x \in A_e$ oraz $a \in A$. Wówczas

$$||L_x(a)||^2 = ||xa||^2 = ||(xa)^*(xa)|| = ||a^*(x^*x)a|| \leqslant ||a^*|| \cdot ||L_{x^*x}(a)|| \leqslant ||a||^2 ||L_{x^*x}||.$$

Wnioskujemy stąd

$$||x||_0^2 = ||L_x||^2 \leqslant ||L_{x^*x}|| = ||x^*x||_0 \leqslant ||L_{x^*}|| ||L_x|| = ||x^*||_0 ||x||_0, \tag{3.1}$$

czyli

$$||x||_0 \leqslant ||x^*||_0 \text{ oraz } ||x^*||_0 \leqslant ||x^{**}||_0 = ||x||_0,$$

a zatem $||x^*||_0 = ||x||_0$. Ostatecznie dostajemy

$$||x^*x||_0 \leqslant ||x^*||_0 ||x||_0 = ||x||_0^2,$$

co w połączeniu z nierównością (3.1) kończy dowód. □

Przechodzimy teraz do kluczowego przypadku przemiennego.

Stwierdzenie 3.2.5. *Niech A będzie przemienną C^*-algebrą. Wówczas A jest algebrą symetryczną.*

Dowód. W oparciu o poprzednie twierdzenie możemy założyć, że A ma jedynkę. Ponadto, dzięki Twierdzeniu 3.1.11 wystarczy uzasadnić, iż A jest algebrą hermitowską. Niech więc $x \in A$ będzie elementem hermitowskim oraz $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$. Musimy wykazać zdanie $\varphi(x) \in \mathbb{R}$. Przyjmijmy $z = x + ite$ dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $\varphi(x) = \alpha + \beta i$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Przy tych oznaczeniach dostajemy

$$\varphi(z) = \alpha + i(\beta + t) \text{ oraz } zz^* = x^2 + t^2 e,$$

a więc

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\varphi(z)|^2 \leqslant ||z||^2 = ||zz^*|| \leqslant ||x||^2 + t^2.$$

Po wykonaniu redukcji dostajemy

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leqslant ||x||^2 \text{ dla wszystkich } t \in \mathbb{R},$$

a stąd $\beta = 0$. □

Do dowodu Twierdzenia Gelfanda - Najmarka potrzebny nam będzie jeszcze jeden lemat.

Lemat 3.2.6. *Niech A będzie C^*-algebrą oraz $x \in A$ elementem hermitowskim. Wówczas $r(x) = ||x||$.*

Dowód. Z warunku C^* dostajemy $||x||^2 = ||x^*x|| = ||x^2||$. Przez łatwą indukcję uzyskujemy tożsamość

$$||x||^{2^n} = ||x^{2^n}||,$$

z której teza wynika w oparciu o wzór na promień spektralny. □

Czas na zapowiadane twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.7 (Gelfand-Najmark)**.** *Niech A będzie przemienną C^*-algebrą. Wówczas transformacja Gelfanda jest izometrycznym *-izomorfizmem A na $C_0(\mathfrak{M}(A))$.*

Dowód. Korzystając z Twierdzenia 3.1.11 oraz Stwierdzenia 3.2.5 widzimy, że transformacja Gelfanda jest *-homomorfizmem. Teraz, na mocy ostatniego lematu dla dowolnego $x \in A$ mamy

$$r(x^*x) = ||x^*x|| = ||x||^2.$$

Pamiętając, że $\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}$ otrzymujemy

$$||\widehat{x}||_\infty^2 = ||\overline{\widehat{x}}\widehat{x}||_\infty = ||\widehat{(x^*x)}||_\infty = r(x^*x) = ||x||^2.$$

Zatem transformacja Gelfanda jest izometrią. W szczególności $\widehat{A}$ jest zupełna w normie supremum, a stąd domknięta w $C_0(\mathfrak{M}(A))$. Ponadto $\widehat{A}$ jest *-podalgebrą rozdzielającą punkty, a więc z Twierdzenia Stone'a-Weierstrassa jest gęsta w $C_0(\mathfrak{M}(A))$, co kończy dowód. □

Pomimo swojego przemiennego charakteru Twierdzenie Gelfanda - Najmarka wraz z Twierdzeniem 3.1.9 pozwala udowodnić wiele rezultatów dla nieprzemiennych C^*-algebr. Wprowadzimy najpierw definicję.

Definicja 3.2.8. W algebrze Banacha z inwolucją będziemy pisać $x \geqslant 0$, gdy $x = x^*$ oraz $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$ (takie elementy nazywamy dodatnimi).

Potrzebujemy jeszcze jednego lematu technicznego.

Lemat 3.2.9. *Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha. Wówczas dla dowolnych $x, y \in A$ zachodzi*

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}.$$

Dowód. Ze względu na symetryczność tezy wystarczy uzasadnić, że jeżeli $\lambda \notin \sigma(xy) \cup \{0\}$, to $\lambda \notin \sigma(yx) \cup \{0\}$. Rozważamy oczywiście tylko $\lambda \neq 0$, więc przez podstawienie $-\lambda^{-1}x$ za pierwotny element x sprowadzamy dowód do wykazania, iż $-1 \notin \sigma(xy)$ implikuje $-1 \notin \sigma(yx)$. Równoważnie oznacza to wynikanie $e + xy \in G(A) \Rightarrow e + yx \in G(A)$. Rozpatrzmy w tym celu element $z \in A$ określony wzorem

$$z = e - y(e + xy)^{-1}x.$$

Sprawdzimy, że jest to odwrotność $e + yx$. Istotnie,

$$\begin{aligned} z(e + yx) &= e + yx - y(e + xy)^{-1}x - y(e + xy)^{-1}xyx = \\ &= e + yx - y(e + xy)^{-1}x - y(e + xy)^{-1}(e + xy - e)x = e, \end{aligned}$$

jest więc z lewą odwrotnością $e + yx$. Równość $(e + yx)z = e$ sprawdzamy analogicznie. □

Twierdzenie 3.2.10. *Każda C^*-algebra A ma następujące własności:*

1. *Jest algebrą symetryczną (w szczególności hermitowską).*
2. *Jeśli $x \in A$ jest normalny, to $r(x) = ||x||$.*
3. *Jeśli $y \in A$, to $r(yy^*) = ||y||^2$.*
4. *Jeśli $u, v \geqslant 0$, to $u + v \geqslant 0$.*
5. *Jeśli $y \in A$, to $e + yy^*$ jest odwracalny w A.*

Dowód. Jak poprzednio, możemy założyć, że algebra A ma jedynkę. Każdy element normalny $x \in A$ leży w maksymalnym zbiorze normalnym $B \subset A$. Na mocy Twierdzenia Gelfanda - Najmarka i Twierdzenia 3.1.9 zbiór B jest przemienną C^* algebrą z jedynką, która jest izometrycznie izomorficzna z $\widehat{B} = C(\mathfrak{M}(B))$ o dodatkowej własności

$$\sigma_A(z) = \widehat{z}(\mathfrak{M}(B)) \text{ dla } z \in B. \tag{3.2}$$

Jeśli $x = x^*$, to Twierdzenie Gelfanda - Najmarka prowadzi do wniosku, iż $\widehat{x}$ jest funkcją o wartościach rzeczywistych, co dowodzi osłabionej wersji tezy punktu

1. Dla każdego normalnego x równanie (3.2) implikuje $r(x) = ||\widehat{x}||_\infty$, ale B i $\widehat{B}$ są izometryczne, więc $r(x) = ||x||$, co uzasadnia punkt 2. Jeśli $y \in A$, to yy^* jest hermitowski, a w więc w szczególności normalny. Dowiedziony już punkt 2. daje

$$r(yy^*) = ||yy^*|| = ||y||^2,$$

czyli tezę punktu 3. Niech teraz u, v będą jak w punkcie 4. Przyjmijmy $\alpha = ||u||$, $\beta = ||v||$, $w = u + v$, $\gamma = \alpha + \beta$. Wówczas $\sigma(u) \subset [0, \alpha]$, a stąd $\sigma(\alpha e - u) \subset [0, \alpha]$ (wprost z definicji spektrum), a więc punkt 2. implikuje $||\alpha e - u|| \leqslant \alpha$. Analogiczne rozumowanie prowadzi do $||\beta e - v|| \leqslant \beta$. Zatem $||\gamma e - w|| \leqslant \gamma$ (nierówność trójkąta). Skoro $w = w^*$, to hermitowskość naszej algebry implikuje, że $\sigma(\gamma e - w)$ jest rzeczywiste. Stąd $\sigma(\gamma e - w) \subset [-\gamma, \gamma]$. Prowadzi to jednak elementarnie do zawierania $\sigma(w) \subset [0, 2\gamma]$. Zatem $w \geqslant 0$ i dowód punktu 4. jest zakończony. Przechodzimy do dowodu pełnej wersji punktu 1. Niech $y \in A$ i przyjmijmy $x = yy^*$. Wówczas x jest hermitowski i wybierając B jak na początku dowodu $\widehat{x}$ jest funkcją o wartościach rzeczywistych na $\mathfrak{M}(B)$. Na mocy równania (3.2) musimy udowodnić, że $\widehat{x} \geqslant 0$. Skoro $\widehat{B} = C(\mathfrak{M}(B))$, to istnieje $z \in B$ spełniający

$$\widehat{z} = |\widehat{x}| - \widehat{x} \text{ na } \mathfrak{M}(B). \tag{3.3}$$

Wówczas $z = z^*$, bo $\widehat{z}$ jest funkcją o wartościach rzeczywistych. Przyjmijmy $zy = w = u + iv$, gdzie $u, v \in A$ są hermitowskie. Wtedy

$$ww^* = zyy^*z^* = zxz = z^2x \tag{3.4}$$

i podobnie,

$$w^*w = 2u^2 + 2v^2 - ww^* = 2u^2 + 2v^2 - z^2x.$$

Elementy u, v są hermitowskie, więc z poprzedniej części dowodu wiemy już, że mają rzeczywiste spektra. Zatem $u^2, v^2 \geqslant 0$. Z równania (3.3) wynika, że $\widehat{z}^2\widehat{x} \leqslant 0$ na $\mathfrak{M}(B)$. Oczywiście $z^2x \in B$, więc $-z^2x \geqslant 0$. W ten sposób zapisaliśmy w^*w w postaci sumy elementów dodatnich, a więc $w^*w \geqslant 0$. Jednak z Lematu 3.2.9 $\sigma(ww^*) \subset \sigma(w^*w) \cup \{0\}$, co prowadzi do $ww^* \geqslant 0$. Z równania (3.4) jest to równoważne $\widehat{z}^2\widehat{x} \geqslant 0$ na $\mathfrak{M}(B)$. Definicja elementu z (3.3) pokazuje, że jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $\widehat{x} = |\widehat{x}|$. Oznacza to jednak $\widehat{x} \geqslant 0$, a więc dowód tej części jest zakończony. Ostatni punkt łatwo wynika teraz z już udowodnionych, bo $e + yy^* \in B$, a transformatą Gelfanda elementu neutralnego jest funkcja stale równa 1. □

Możemy teraz udowodnić ważny fakt, orzekający iż spektrum elementu w C^* - algebrze nie zmienia się przy przechodzeniu do domkniętych * - podalgebr z jedynką.

Twierdzenie 3.2.11. *Niech A będzie C^* - algebrą z jedynką, a B domkniętą * - podalgebrą z jedynką. Wówczas $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ dla każdego $x \in B$.*

Dowód. Niech $x \in B$ oraz $x \in G(A)$. Wystarczy pokazać, że $x^{-1} \in B$. Skoro x jest odwracalny w A, to odwracalne są również elementy x^* oraz xx^*, czyli $0 \notin \sigma_A(xx^*)$. Z pierwszego punktu ostatniego twierdzenia wynika, że $\sigma_A(xx^*) \subset$

$\mathbb{R}$, a więc $\sigma_A(xx^*)$ ma spójne dopełnienie w $\mathbb{C}$. Własności spektrum prowadzą teraz do $\sigma_B(xx^*) = \sigma_A(xx^*)$. Zatem $(xx^*)^{-1} \in B$ i w końcu $x^{-1} = x^*(xx^*)^{-1} \in B$. □

Przechodzimy do ciągłego rachunku funkcyjnego.

Twierdzenie 3.2.12. *Niech A będzie przemienną C^* - algebrą z jedynką, która zawiera element x taki, że wielomiany od x i x^* są gęste w A. Wówczas wzór*

$$\widehat{\Psi f} = f \circ \widehat{x}$$

zadaje izometryczny * - izomorfizm Ψ z $C(\sigma(x))$ na A. Ponadto, jeśli $f(\lambda) = \lambda$ na $\sigma(x)$, to $\Psi f = x$.

Dowód. Podstawowe informacje o transformacie Gelfanda implikują, że $\widehat{x}$ jest funkcją ciągłą na $\mathfrak{M}(A)$, której obrazem jest $\sigma(x)$. Załóżmy, że $\widehat{x}(\varphi_1) = \widehat{x}(\varphi_2)$, czyli $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Z Twierdzenia Gelfanda - Najmarka dostajemy $\varphi_1(x^*) = \varphi_2(x^*)$. Jeśli P jest wielomianem dwóch zmiennych, to dostajemy

$$\varphi_1(P(x, x^*)) = \varphi_2(P(x, x^*)).$$

Elementy tego typu są z założenia gęste w A, co prowadzi do równości $\varphi_1 = \varphi_2$. W ten sposób uzasadniliśmy różnowartościowość $\widehat{x}$. Ze zwartości $\mathfrak{M}(A)$ wynika teraz, że $\widehat{x}$ jest homeomorfizmem $\mathfrak{M}(A)$ na $\sigma(x)$. Odwzorowanie $f \mapsto f \circ \widehat{x}$ jest zatem izometrycznym * - izomorfizmem $C(\sigma(x))$ na $C(\mathfrak{M}(A))$. Każda $f \circ \widehat{x}$ jest wobec Twierdzenia Gelfanda - Najmarka transformatą Gelfanda jednoznacznie wyznaczonego elementu, który oznaczamy Ψf. Dodatkowo, wspomniane przed chwilą twierdzenie daje $||\Psi f|| = ||f||_\infty$. Ostatnia część wynika stąd, że jeśli $f(\lambda) = \lambda$, to $f \circ \widehat{x} = \widehat{x}$ i definicja elementu Ψf kończy nasze rozważania. □

Jako wniosek otrzymamy twierdzenie o ciągłym rachunku funkcyjnym dla operatorów normalnych w przestrzeniach Hilberta.

Twierdzenie 3.2.13 (Ciągły rachunek funkcyjny dla operatorów normalnych)**.** *Niech $T \in B(H)$ będzie operatorem normalnym oraz niech A będzie najmniejszą * - podalgebrą z jedynką algebry $B(H)$ zawierającą operator T. Wówczas każdej funkcji $f \in C(\sigma_{B(H)}(T))$ można przyporządkować operator $f(T)$ w ten sposób, że*

$$\sigma_{B(H)}(f(T)) = f(\sigma_{B(H)}(T)).$$

Co więcej przyporządkowanie $f \mapsto f(T)$ jest izometrycznym *-izomorfizmem $C(\sigma_{B(H)}(T))$ na algebrę $A \subset B(H)$.

Dowód. Z założenia A jest przemienną C^* - algebrą z jedynką, więc można do niej zastosować poprzednie twierdzenie. Większa część tezy wynika wprost z niego - jedyne, co pozostaje do uzasadnienia to fakt, iż spektrum jest takie samo w całej algebrze $B(H)$. Wynika to jednak z Twierdzenia 3.2.11. □

Na koniec, omówimy klasyczne zastosowanie twierdzenia Gelfanda - Najmarka do topologii.

Definicja 3.2.14. Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa. Parę (Y, β) składającą się z przestrzeni zwartej Y oraz odwzorowania $\beta : X \mapsto Y$ będziemy nazywać uzwarceniem Cecha - Stone'a, jeśli spełnione są warunki:

1. $\beta(X)$ jest gęste w Y oraz $\beta : X \mapsto \beta(X)$ jest homeomorfizmem.

2. Każda $f \in C_B(X)$ rozszerza się na Y, to znaczy, że istnieje $\widetilde{f} \in C(Y)$ o własności $\widetilde{f}(\beta(x)) = f(x)$ dla każdego $x \in X$.

Oczywiście $\widetilde{f}$ jest jednoznacznie wyznaczone, bo $\beta(X)$ jest gęste w Y.

Załóżmy na chwilę, że X posiada uzwarcenie Cecha-Stone'a (Y, β). Wówczas, dla każdego domkniętego podzbioru $E \subset X$ i $x \in X \backslash E$ istnieje $f \in C_B(X)$ takie, że $f|_E = 0$ oraz $f(x) \neq 0$. Rzeczywiście, jeśli C jest domkniętym podzbiorem w Y oraz $C \cap \beta(X) = \beta(E)$, to $\beta(x) \notin C$ i z lematu Urysohna znajdziemy $g \in C(Y)$ o własnościach $g(\beta(x)) \neq 0$, $g|_C = 0$. Teraz, $f = g \circ \beta \in C_B(X)$ ma żądane własności. Nasze rozumowanie prowadzi do następującej definicji.

Definicja 3.2.15. Przestrzeń Hausdorffa X nazywamy przestrzenią całkowicie regularną (przestrzenią Tichonowa, $T_{3\frac{1}{2}}$), gdy dla każdego zbioru domkniętego $E \subset X$ oraz $x \in X \setminus E$ istnieje $f \in C_B(X)$ o własności $f|_E = 0$ oraz $f(x) \neq 0$.

Możemy już przejść do dowodu istnienia uzwarcenia Cecha - Stone'a przestrzeni całkowicie regularnej.

Twierdzenie 3.2.16. *Niech X będzie przestrzenią całkowicie regularną i niech $Y = \mathfrak{M}(C_B(X))$. Określmy $\beta : X \mapsto Y$ jako $\beta(x) = \varphi_x$, gdzie φ_x to ewaluacja funkcji z $C_B(X)$ w punkcie x. Wówczas (Y, β) jest uzwarceniem Cecha - Stone'a przestrzeni X.*

Dowód. $C_B(X)$ jest przemienną C^* - algebrą z jedynką. Stąd $\mathfrak{M}(C_B(X))$ jest zwarte oraz transformacja Gelfanda jest izometrycznym * - izomorfizmem $C_B(X)$ na $C(Y)$. Odwzorowanie $\beta : X \mapsto Y$ jest różnowartościowe, bo dla różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ całkowita regularność X zapewnia istnienie $f \in C_B(X)$ o własności

$$\varphi_{x_1}(f) = f(x_1) \neq f(x_2) = \varphi_{x_2}(f).$$

Drugi warunek z definicji uzwarcenia Cecha - Stone'a jest spełniony przez $\widetilde{f} = \widehat{f}$, bo z definicji β mamy

$$\widehat{f}(\beta(x)) = \widehat{f}(\varphi_x) = \varphi_x(f) = f(x)$$

dla wszystkich $f \in C_B(X)$ i $x \in X$. Pokażemy teraz, że $\beta : X \mapsto \beta(X)$ jest homeomorfizmem. W tym celu weźmy $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$, $f_1, \ldots, f_n \in C_B(X)$ i rozważmy zbiory

$$V = \{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset X,$$
$$U = \{\varphi_x \in \beta(X) : |\varphi_x(f_i) - \varphi_{x_0}(f_i)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset \beta(X).$$

Wówczas $V = \beta^{-1}(U)$ i V jest otwarte w X. Zbiory U stanowią bazę topologii na $\beta(X) \subset Y = \mathfrak{M}(C_B(X))$. Stąd β jest ciągłe i aby pokazać, że jest otwarte wystarczy uzasadnić, że zbiory V stanowią bazę topologii na X. Niech W będzie otwartym podzbiorem w X zawierającym x_0. Wówczas, skoro X jest całkowicie regularna, to istnieje $f \in C_B(X)$ takie, że $f(x_0) \neq 0$ i $f|_{X \setminus W} = 0$. Stąd

$$x_0 \in \{x \in X : |f(x) - f(x_0)| < |f(x_0)|\} \subset W.$$

Aby zakończyć dowód należy jeszcze wykazać, że $\beta(X)$ jest gęste w Y. Załóżmy przeciwnie, to znaczy istnieje $g \in C(Y)$, $g \neq 0$, ale $g|_{\beta(X)} = 0$. Transformacja Gelfanda przekształca $C_B(X)$ na $C(Y)$, więc znajdziemy $f \in C_B(X)$ czyniące zadość równości $\widehat{f} = g$. Wówczas

$$0 = g(\varphi_x) = \widehat{f}(\varphi_x) = \varphi_x(f) = f(x)$$

dla wszystkich $x \in X$. Ale $f = 0$ implikuje $g = 0$, co jest oczekiwaną sprzecznością. $\square$

3.3 Funkcjonały dodatnie

Potrzebne nam będzie w dalszym ciągu twierdzenie o istnieniu hermitowskich pierwiastków. Udowodnimy je w podrozdziale o rachunku funkcyjnym.

Twierdzenie 3.3.1. *Przypuśćmy, że A jest przemienną algebrą Banacha z inwolucją, $x \in A$, $x = x^*$ i $\sigma(x)$ nie zawiera rzeczywistych λ spełniających $\lambda \leqslant 0$. Wówczas istnieje $y \in A$ takie, że $y = y^*$ i $y^2 = x$.*

Przyda nam się również następujący lemat.

Lemat 3.3.2. *Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech A, B będą domkniętymi podprzestrzeniami liniowymi X takimi, że $X = A + B$. Wówczas istnieje stała $\gamma < \infty$ o tej własności, iż każdy $x \in X$ ma przedstawienie w postaci $x = a + b$, gdzie $a \in A$, $b \in B$ oraz $||a|| + ||b|| \leqslant \gamma ||x||$.*

Dowód. Niech $Y = A \times B$. Wprowadźmy w Y normę

$$||(a, b)|| = ||a|| + ||b||.$$

Ponieważ A i B są zupełne, Y jest przestrzenią Banacha. Odwzorowanie $T : Y \mapsto X$ zadane wzorem

$$T(a, b) = a + b$$

jest ciągłe, bo $||a + b|| \leqslant ||(a, b)||$ i odwzorowuje Y na X. Teraz teza wynika w standardowy sposób z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym. $\square$

Czas na tytułową definicję.

Definicja 3.3.3. Funkcjonał dodatni na algebrze A z inwolucją to funkcjonał liniowy (nie zakładamy ciągłości) spełniający warunek

$$F(xx^*) \geqslant 0 \text{ dla każdego } x \in A.$$

Podstawowe własności tych funkcjonałów opisuje następne twierdzenie.

Twierdzenie 3.3.4. *Każdy dodatni funkcjonał F na * - algebrze Banacha A z jedynką ma następujące własności:*

1. $F(x^*) = \overline{F(x)}$.
2. $|F(xy^*)|^2 \leqslant F(xx^*)F(yy^*)$.
3. $|F(x)|^2 \leqslant F(e)F(xx^*) \leqslant F(e)^2 r(xx^*)$.
4. $|F(x)| \leqslant F(e)r(x)$ *dla każdego normalnego* $x \in A$.
5. F *jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na* A*. Co więcej,* $||F|| = F(e)$*, jeśli* A *jest przemienna i* $||F|| \leqslant \beta^{\frac{1}{2}} F(e)$*, jeśli inwolucja spełnia* $||x^*|| \leqslant \beta ||x||$ *dla każdego* $x \in A$.

Dowód. Niech $x, y \in A$. Przyjmijmy

$$p = F(xx^*) \ q = F(y^*y) \ r = F(xy^*) \ s = F(yx^*).$$

Skoro $F[(x + \alpha y)(x^* + \overline{\alpha} y^*)] \geqslant 0$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{C}$, to

$$p + \overline{\alpha} r + \alpha s + |\alpha|^2 q \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Przy $\alpha = 1$ otrzymujemy $r + s \in \mathbb{R}$, a wstawiając $\alpha = i$ dostajemy $i(s - r) \in \mathbb{R}$. Stąd $s = \overline{r}$. Kładąc $y = e$ kończymy dowód punktu 1. Jeśli $r = 0$, to punkt 2. jest oczywisty. Gdy $r \neq 0$, weźmy $\alpha = \frac{tr}{|r|}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$ w (3.5). Otrzymujemy wtedy nierówność

$$p + 2t|r| + qt^2 \geqslant 0 \text{ dla } t \in \mathbb{R}.$$

Zatem wyróżnik równania jest niedodatni, czyli $|r|^2 \leqslant pq$, co jest tezą punktu 2.. Ze względu na równość $ee^* = e$, pierwsza połowa punktu 3. wynika z punktu 2. Aby udowodnić część drugą wybierzmy $t > r(xx^*)$. Wówczas $\sigma(te - xx^*)$ leży w otwartej prawej półpłaszczyźnie. Z Twierdzenia 3.3.1 istnieje $u \in A$ spełniające $u = u^*$ takie, że $u^2 = te - xx^*$. Stąd

$$tF(e) - F(xx^*) = F(u^2) \geqslant 0.$$

Skoro t jest dowolną liczbą o własności $t > r(xx^*)$ dostajemy

$$F(xx^*) \leqslant F(e)r(xx^*),$$

czyli punkt 3. Jeśli x jest normalny, to $\sigma(xx^*) \subset \sigma(x)\sigma(x^*)$, a więc

$$r(xx^*) \leqslant r(x)r(x^*) = r(x)^2.$$

W ten sposób punkt 4. wynika z 3. Gdy A jest przemienna każdy element jest normalny i 4. implikuje $||F|| = F(e)$. Jeśli zaś $||x^*|| \leqslant \beta ||x||$, to z 3. otrzymujemy $|F(x)| \leqslant F(e)\beta^{\frac{1}{2}} ||x||$, bo $r(xx^*) \leqslant ||x|| ||x^*||$. W ten sposób udowodniliśmy szczególne przypadki 5. Na mocy części 3. $F(e) \geqslant 0$ i $F(x) = 0$ dla każdego $x \in A$, gdy $F(e) = 0$. Będziemy dalej, bez straty ogólności zakładać, że

$$F(e) = 1.$$

Niech H będzie zbiorem wszystkich elementów hermitowskich algebry A. Wówczas H oraz iH są rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi oraz $A = H + iH$. Z punktu 4. wynika, iż F ograniczone do H jest rzeczywistym funkcjonałem liniowym o normie 1, a więc rozszerza się on do rzeczywistego funkcjonału liniowego Φ na $\overline{H}$ o normie 1. Uzasadnimy teraz, że

$$\Phi(y) = 0 \text{ dla } y \in \overline{H} \cap i\overline{H}. \tag{3.6}$$

Rzeczywiście, jeśli

$$y = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (iv_n) \text{ dla } u_n, v_n \in H,$$

to $u_n^2 \to y^2$ oraz $v_n^2 \to -y^2$. Teraz punkty 3. i 4. implikują

$$|F(u_n)|^2 \leqslant F(u_n^2) \leqslant F(u_n^2 + v_n^2) \leqslant ||u_n^2 + v_n^2|| \to 0.$$

Jednak

$$\Phi(y) = \lim_{n\to\infty} F(u_n),$$

co dowodzi (3.6). Istnieje stała $\gamma < \infty$ (korzystamy z Lematu 3.3.2) taka, że każdy $x \in A$ ma przedstawienie

$$x = x_1 + ix_2,\ x_1 \in \overline{H},\ x_2 \in \overline{H},\ ||x_1|| + ||x_2|| \leqslant \gamma||x||.$$

Jeśli $x = u + iv$, gdzie $u \in H$, $v \in H$, to $x_1 - u$ oraz $x_2 - v$ leżą w $\overline{H} \cap i\overline{H}$. Stąd (3.6) daje

$$F(x) = F(u) + iF(v) = \Phi(x_1) + i\Phi(x_2),$$

a więc ostatecznie

$$|F(x)| \leqslant |\Phi(x_1)| + |\Phi(x_2)| \leqslant ||x_1|| + ||x_2|| \leqslant \gamma||x||.$$

□

Kolejne twierdzenie dostarczy wielu przykładów funkcjonałów dodatnich. Jako szczególny przypadek zawiera ono klasyczne twierdzenie Bochnera o funkcjach dodatnio określonych.

Twierdzenie 3.3.5. *Niech A będzie symetryczną, przemienną * - algebrą Banacha z jedynką i niech K będzie zbiorem wszystkich dodatnich funkcjonałów na A, które spełniają warunek $F(e) \leqslant 1$. Oznaczmy ponadto przez M zbiór dodatnich miar borelowskich na $\mathfrak{M}(A)$, o normie nie przekraczającej 1. Wówczas wzór*

$$F(x) = \int_{\mathfrak{M}(A)} \widehat{x} d\mu \ x \in A$$

ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy zbiorami wypukłymi K i M, która przeprowadza punkty ekstremalne na punkty ekstremalne. W szczególności, funkcjonały liniowo - multiplikatywne na A są wszystkimi punktami ekstremalnymi K.

Dowód. Jeśli $\mu \in M$ i F jest zadane tak jak w twierdzeniu, to pamiętając, że $\widehat{xx^*} = |\widehat{x}|^2$ otrzymujemy

$$F(xx^*) = \int_{\mathfrak{M}(A)} |\widehat{x}|^2 d\mu \geqslant 0,$$

a ponadto $F(e) = \mu(\mathfrak{M}(A)) \leqslant 1$, czyli $F \in K$. Jeśli $F \in K$, to F znika na radykale A na mocy punktu 4. Twierdzenia 3.3.4. Określmy funkcjonał $\widehat{F}$ na $\widehat{A}$ wzorem $\widehat{F}(\widehat{x}) = F(x)$ dla $x \in A$. Wtedy,

$$|\widehat{F}(\widehat{x})| = |F(x)| \leqslant F(e)r(x) = F(e)||\widehat{x}||_\infty,$$

gdzie w dowodzie drugiej nierówności użyliśmy punktu 4. Twierdzenia 3.3.4. Wynika stąd, że $\widehat{F}$ jest funkcjonałem liniowym ciągłym o normie $F(e)$ na $\widehat{A} \subset C(\mathfrak{M}(A))$. Rozszerza się on do funkcjonału na $C(\mathfrak{M}(A))$, a więc twierdzenie Riesza zapewnia istnienie regularnej miary borelowskiej μ takiej, że $||\mu|| = F(e)$, spełniającej tezę twierdzenia. Ponadto,

$$\mu(\mathfrak{M}(A)) = \int_{\mathfrak{M}(A)} \widehat{e} d\mu = F(e) = ||\mu||,$$

czyli $\mu \geqslant 0$ i $\mu \in M$. Z założenia $\widehat{A}$ jest gęsta w $C(\mathfrak{M}(A))$ (twierdzenie Stone'a - Weierstrassa), dzięki czemu μ jest jednoznacznie wyznaczona przez F. Jednym z punktów ekstremalnych M jest 0, a pozostałe są deltami Diraca w punktach $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$. Każdy funkcjonał liniowo - multiplikatywny ma postać $x \mapsto \widehat{x}(\varphi)$ dla pewnego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$, co kończy dowód. □

Na koniec tego podrozdziału zobaczymy, że punkty ekstremalne K są multiplikatywne bez założenia symetrii algebry.

Twierdzenie 3.3.6. *Niech K będzie zbiorem wszystkich funkcjonałów dodatnich F na przemiennej * - algebrze Banacha z jedynką, które spełniają $F(e) \leqslant 1$. Jeśli $F \in K$, to każda z poniższych trzech własności implikuje dwie pozostałe*

1. *$F(xy) = F(x)F(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$.*
2. *$F(xx^*) = F(x)F(x^*)$ dla każdego $x \in A$.*
3. *F jest punktem ekstremalnym K.*

Dowód. Jest jasne, że punkt 1. implikuje 2. Załóżmy, iż 2. zachodzi. Wstawiając $x = e$ otrzymujemy $F(e) = F(e)^2$, czyli $F(e) = 0$ lub $F(e) = 1$. Jeśli $F(e) = 0$, to $F = 0$ ze względu na punkt 3. Twierdzenia 3.3.4, a więc F jest punktem ekstremalnym K. Przyjmijmy $F(e) = 1$ i $2F = F_1 + F_2$ dla $F_1, F_2 \in K$. Musimy wykazać, że $F_1 = F_2$. Oczywiście $F_1(e) = 1 = F(e)$. Jeśli $x \in A$ spełnia $F(x) = 0$, to

$$|F_1(x)|^2 \leqslant F_1(xx^*) \leqslant 2F(xx^*) = 2F(x)F(x^*) = 0,$$

dzięki punktowi 2. Twierdzenia 3.3.4. Stąd F_1 pokrywa się z F na jądrze F oraz w e, co prowadzi do $F_1 = F$ i kończy dowód tej implikacji. Na koniec, niech F będzie punktem ekstremalnym K. Gdy $F(e) = 0$ ponownie otrzymujemy $F = 0$ i kończymy rozumowanie. W przeciwnym wypadku musi być $F(e) = 1$ (inaczej mielibyśmy rozkład $2F(e) = \lambda_1 + \lambda_2$, $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, który łatwo prowadzi do sprzeczności z ekstremalnością F). Udowodnimy najpierw szczególny przypadek 1., a mianowicie

$$F(xx^*y) = F(xx^*)F(y) \text{ dla } x, y \in A. \tag{3.7}$$

Wybierzmy x tak, aby $||xx^*|| < 1$. Korzystając z Twierdzenia 3.3.1 istnieje $z \in A$, $z = z^*$ spełniające $z^2 = e - xx^*$. Zdefiniujmy

$$\Phi(y) = F(xx^*y) \text{ dla } y \in A.$$

Wówczas

$$\Phi(yy^*) = F(xx^*yy^*) = F[(xy)(xy)^*] \geqslant 0$$

i również

$$(F - \Phi)(yy^*) = F[(e - xx^*)yy^*] = F(z^2yy^*) = F[(yz)(yz)^*] \geqslant 0.$$

Ponadto

$$0 \leqslant \Phi(e) = F(xx^*) \leqslant F(e)||xx^*|| < 1.$$

Zatem Φ oraz $F - \Phi$ leżą w K. Tak jak wcześniej, gdy $\Phi(e) = 0$, to $\Phi = 0$ i $F = 0$. Jeśli $\Phi(e) > 0$, to

$$F = \Phi(e) \cdot \frac{\Phi}{\Phi(e)} + (F - \Phi)(e) \cdot \frac{F - \Phi}{F(e) - \Phi(e)},$$

a więc F jest kombinacją wypukłą elementów K. Z ekstremalności F uzyskujemy

$$\Phi = \Phi(e)F.$$

Teraz równanie (3.7) wynika z definicji Φ. Aby zobaczyć, że wynika stąd punkt 1. wykażemy tożsamość pomocniczą. Niech $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{n})$, $x \in A$ oraz $z_p = e + \omega^{-p}x$. Wówczas, dla $n = 3, 4, \ldots$ zachodzi

$$x = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \omega^p z_p z_p^*. \tag{3.8}$$

Istotnie,

$$\omega^p z_p z_p^* = \omega^p(e + \omega^{-p}x)(e + \omega^p x^*) = \omega^p e + x + \omega^{2p}x^* + \omega^p xx^*.$$

Ponadto $\omega^n = 1$, a więc $1+\omega+\ldots+\omega^{n-1} = 0$ i podobnie wstawiając $2n$ zamiast n, co prowadzi do

$$\sum_{p=1}^{n} \omega^p = \sum_{p=1}^{n} \omega^{2p} = 0$$

kończąc uzasadnienie równania (3.8). Punkt 1. dostajemy teraz bez trudu, bo

$$F(xy) = F\left(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}(\omega^p z_p z_p^*)y\right) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\omega^p F(z_p z_p^* y) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\omega^p F(z_p z_p^*)F(y) = F(x)F(y).$$

$\square$

Rozdział 4

Brzeg Szyłowa i Rachunek Funkcyjny

4.1 Brzeg Szyłowa

Definicja 4.1.1. Niech X będzie zbiorem, a F rodziną ograniczonych funkcji zespolonych na X. Podzbiór $R \subset X$ nazwiemy brzegiem dla F, gdy dla każdego $f \in F$ istnieje $y \in R$ taki, że

$$|f(y)| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Twierdzenie 4.1.2. *Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa i załóżmy, że A jest podalgebrą $C_0(X)$, która silnie rozdziela punkty. Wówczas przecięcie wszystkich domkniętych brzegów dla A jest również brzegiem dla A.*

Dowód. Niech $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich domkniętych brzegów dla A. Oczywiście $\mathcal{R}$ jest niepusty, bo $X \in \mathcal{R}$. Wprowadzamy częściowy porządek na $\mathcal{R}$ kładąc

$$R_1 \geqslant R_2 \;\Leftrightarrow\; R_1 \subset R_2.$$

Chcemy zastosować lemat Kuratowskiego - Zorna do $\mathcal{R}$. Niech więc $\{R_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ będzie liniowo uporządkowanym podzbiorem $\mathcal{R}$ i przyjmijmy

$$R = \bigcap \{R_\lambda : \lambda \in \Lambda\}.$$

Aby pokazać, że R jest również brzegiem dla A rozważmy, dla dowolnego $f \in A$, $f \neq 0$ zbiór

$$X_f = \{x \in X : |f(x)| = ||f||_\infty\}.$$

Wówczas X_f jest niepusty i zwarty, bo $f \neq 0$ znika w nieskończoności. Teraz, dla każdego $\lambda \in \Lambda$ mamy $R_\lambda \cap X_f \neq \emptyset$, bo R_λ jest brzegiem. Rodzina $\{R_\lambda \cap X_f : \lambda \in \Lambda\}$ jest liniowo uporządkowana i składa się ze zwartych podzbiorów X, więc ma własność skończonych przecięć (przecięcie skończenie wielu elementów jest niepuste). Ze zwartości X_f wynika teraz, że

$$R \cap X_f = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (R_\lambda \cap X_f) \neq \emptyset,$$

czyli istnieje $x \in R$ spełniające $|f(x)| = ||f||_\infty$, a zatem R jest brzegiem dla A. Z lematu Kuratowskiego - Zorna dostajemy element maksymalny R_0. Należy wykazać, iż $R_0 \subset R$ dla każdego $R \in \mathcal{R}$. Załóżmy przeciwnie, to znaczy $R_0 \not\subseteq R$ dla pewnego $R \in \mathcal{R}$. Ustalmy $x_0 \in R_0 \setminus R$ i wybierzmy otoczenie U punktu x_0 takie, że $U \cap R = \emptyset$. Topologia na X zgadza się ze słabą topologią indukowaną przez A, więc można założyć następującą postać U

$$U = U(x_0, f_1, \ldots, f_m, \varepsilon) = \{x \in X : |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon \text{ dla } 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

gdzie $0 < \varepsilon < 1$ oraz $f_1, \ldots, f_m \in A$. Co więcej, można założyć, że $|f_j(x) - f_j(x_0)| \leqslant 1$ dla wszystkich $x \in X$ oraz $1 \leqslant j \leqslant m$. Istotnie, skoro $A \subset C_0(X)$, to

$$M = \sup\{|f_j(x) - f_j(x_0)| : x \in X,\ 1 \leqslant j \leqslant m\} < \infty,$$

a więc zamieniając f_j na $h_j = \frac{f_j}{M}$ w przypadku, gdy $M > 1$ dostajemy funkcje spełniające powyższe założenia i również

$$U(x_0, h_1, \ldots, h_m, \frac{\varepsilon}{M}) \subset U(x_0, f_1, \ldots, f_m, \varepsilon).$$

Dalej, R_0 jest elementem maksymalnym dla $\mathcal{R}$, więc zbiór $R_0 \setminus U$ nie może być brzegiem. Zatem istnieje $f \in A$ o własności $|f(y)| < ||f||_\infty$ dla $y \in R_0 \setminus U$. Oczywiście można założyć, że $||f||_\infty = 1$, a więc $|f(y)| < 1$ dla $y \in R_0 \setminus U$, a stąd skoro $f \in C_0(X)$ dostajemy

$$\sup\{|f(y)| : y \in R_0 \setminus U\} < 1.$$

Wybierzmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $|f(y)|^k < \varepsilon$ dla wszystkich $y \in R_0 \setminus U$ i przyjmijmy $g = f^k$. Wtedy $||g||_\infty = 1$ i dla wszystkich $x \in U$ mamy

$$|g(x)f_j(x) - g(x)f_j(x_0)| \leqslant ||g||_\infty |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon.$$

Podobnie, dla $y \in R_0 \setminus U$ mamy

$$|g(y)f_j(y) - g(y)f_j(x_0)| = |g(y)| \cdot |f_j(y) - f_j(x_0)| < \varepsilon.$$

Skoro R_0 jest brzegiem te oszacowania dają

$$||gf_j - f_j(x_0)g||_\infty < \varepsilon$$

dla $1 \leqslant j \leqslant m$. Z drugiej strony, R również jest brzegiem, więc $1 = ||g||_\infty = |g(x)|$ dla pewnego $x \in R$. Wynika stąd, że

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| = |g(x)f_j(x) - g(x)f_j(x_0)| < \varepsilon$$

dla wszystkich j. Uzasadniliśmy, że $x \in U$, co przeczy założeniu $U \cap R = \emptyset$ i kończy dowód. $\square$

Definicja 4.1.3. Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa i A podalgebrą $C_0(X)$, która silnie rozdziela punkty X. Wówczas przecięcie wszystkich brzegów dla A, które jest brzegiem na mocy poprzedniego twierdzenia, nazywamy brzegiem Szyłowa A i oznaczamy $\partial(A)$.

Wniosek 4.1.4. *Punkt $x \in X$ należy do $\partial(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otoczenia U punktu x istnieje $f \in A$ takie, że*

$$||f|_{X\setminus U}||_\infty < ||f|_U||_\infty$$

Dowód. Niech najpierw $x \in X \setminus \partial(A)$. Wtedy $U = X \setminus \partial(A)$ jest otwartym otoczeniem x, więc dla wszystkich $f \in A$ mamy

$$||f|_U||_\infty \leqslant ||f||_\infty = ||f|_{\partial(A)}||_\infty = ||f|_{X\setminus U}||_\infty.$$

Na odwrót, niech $x \in \partial(A)$ i załóżmy, że istnieje otwarte otoczenie U punktu x takie, że

$$||f|_U||_\infty \leqslant ||f|_{X\setminus U}||_\infty \text{ dla wszystkich } f \in A.$$

Wtedy $X\setminus U$ jest brzegiem dla A, a więc $\partial(A) \subset X\setminus U$, co przeczy $x \in \partial(A)$. □

Podamy teraz kilka przykładów, których szczegółowe przeliczenie pozostawimy jako ćwiczenie.

Przykład 4.1.5.

1. Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą. Wówczas $\partial(C_0(X)) = X$.
2. Niech X będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$. Wówczas $\partial(R(X)) = \partial(X)$.
3. Niech X będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$. Wówczas $\partial(P(X))$ jest równe topologicznemu brzegowi nieograniczonej składowej $\mathbb{C} \setminus X$.

Definicja 4.1.6. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha i $\Gamma : A \mapsto C_0(\mathfrak{M}(A))$ transformacją Gelfanda. Podzbiór $R \subset \mathfrak{M}(A)$ jest brzegiem dla A, gdy jest brzegiem dla $\widehat{A}$. W szczególności $\partial(\widehat{A})$ jest nazywane brzegiem Szyłowa A i oznaczane przez $\partial(A)$.

Porównując ogólną definicję brzegu Szyłowa z definicją brzegu Szyłowa algebry Banacha da się wyczuć pewien niewielki zgrzyt. Niech mianowicie A będzie domkniętą podalgebrą $C_0(X)$. Trzymając się literalnie przyjętych konwencji powinniśmy rozróżniać brzegi A jako rodziny funkcji na X i brzegi dla algebry Banacha A, czyli brzegi $\Gamma(A) \subset C_0(\mathfrak{M}(A))$. Zobaczymy za chwilę, że przy bardzo naturalnych założeniach oba te brzegi są w sposób kanoniczny homeomorficzne.

Uwaga 4.1.7. Niech A będzie domkniętą podalgebrą $C_0(X)$, która silnie rozdziela punkty X. Wówczas każdy brzeg dla $A \subset C_0(X)$ jest brzegiem dla $\Gamma(A)$. Jeśli naturalne włożenie $\phi : X \mapsto \mathfrak{M}(A)$ zadane wzorem $\phi(x) = \varphi_x$, gdzie $\varphi_x(f) = f(x)$ dla $f \in A$ ma domknięty obraz, to jest ono homeomorfizmem takim, że $\phi(\partial(A)) = \partial(\Gamma(A))$.

Dowód. ϕ jest homeomorfizmem X na $\phi(X) \subset \mathfrak{M}(A)$, bo topologia na X pokrywa się ze słabą topologią zadaną przez funkcje z A. Co więcej, dla każdego podzbioru $Y \subset X$,

$$||f|_Y|| = \sup_{y \in Y} |f(y)| = \sup_{y \in Y} |\varphi_y(f)| = ||\widehat{f}|_{\phi(Y)}||_\infty.$$

Zatem, każdy brzeg dla $A \subset C_0(X)$ jest brzegiem dla $\Gamma(A)$. W szczególności, jeśli $\phi(X)$ jest domknięte w $\mathfrak{M}(A)$, to $\phi(\partial(A)) = \partial(\Gamma(A))$. $\square$

Fakt 4.1.8. *Jeśli A jest algebrą Banacha bez jedynki, to $\partial(A) = \partial(A_e) \cap \mathfrak{M}(A)$.*

Dowód. Niech $\varphi \in \partial(A)$ i niech U będzie otwartym otoczeniem φ w $\mathfrak{M}(A)$. Z Wniosku 4.1.4 istnieje $x \in A$ takie, że

$$||\widehat{x}|_U||_\infty > ||\widehat{x}|_{\mathfrak{M}(A) \setminus U}||_\infty.$$

Skoro $\widehat{x}(\varphi_\infty) = 0$, to U jest otwartym otoczeniem φ w $\mathfrak{M}(A_e)$ i ponownie korzystając z tego samego wniosku otrzymujemy $\varphi \in \partial(A_e)$. Na odwrót, wystarczy przypomnieć sobie, iż $\widehat{x}(\varphi_\infty) = 0$ dla wszystkich $x \in A$, więc $\partial(A_e) \cap \mathfrak{M}(A) \subset \partial(A)$. $\square$

Twierdzenie 4.1.9. *Niech A będzie przemienną algebrą Banacha, a B jej domkniętą podalgebrą. Wówczas każde $\varphi \in \partial(B)$ rozszerza się do elementu $\mathfrak{M}(A)$.*

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie najpierw przy założeniu, że zarówno A jak i jej podalgebra B mają tę samą jedynkę e. Niech $\varphi \in \partial(B)$ i załóżmy, że $\ker\varphi \subset \ker\psi$ dla pewnego $\psi \in \mathfrak{M}(A)$. Wówczas $B \cap \ker\psi = \ker\varphi$, bo $\ker\varphi$ ma kowymiar jeden w B, co prowadzi do rozkładu $B = \ker\varphi + \mathrm{lin}\{e\}$, a oczywiście $e \in B \setminus \ker\psi$. Zatem $\ker(\psi|_B) = \ker\varphi$, co w połączeniu z $\psi(e) = 1 = \varphi(e)$ daje $\psi|_B = \varphi$. Przechodzimy teraz do trudniejszej części dowodu - trzeba wskazać stosowne ψ. Dążąc do sprzeczności załóżmy więc, że $\ker\varphi \not\subset M$ dla każdego $M \in \mathrm{Max}(A)$. Niech I oznacza ideał A generowany przez $\ker\varphi$, czyli

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : a_i \in A, b_i \in \ker\varphi, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wówczas $I = A$, bo inaczej $\ker\varphi \subset I \subset M$ dla pewnego $M \in \mathrm{Max}(A)$. Niech

$$e = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \text{ dla pewnych } a_i \in A \text{ oraz } b_i \in \ker\varphi.$$

Dzieląc wszystkie a_i przez odpowiednie skalary możemy założyć, że $||\widehat{b_i}||_\infty \leqslant 1$ dla wszystkich i. Wybierzmy teraz liczbę dodatnią R spełniającą

$$R \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} ||\widehat{a_i}||_\infty.$$

Zdefiniujmy teraz otoczenie φ w $\mathfrak{M}(B)$ jako

$$U = \left\{ \psi \in \mathfrak{M}(B) : |\psi(b_i) - \varphi(b_i)| < \frac{1}{2nR} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n \right\} =$$
$$= \left\{ \psi \in \mathfrak{M}(B) : |\psi(b_i)| < \frac{1}{2nR} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

Skoro $\varphi \in \partial(B)$, to z Wniosku 4.1.4 istnieje $x \in B$, dla którego

$$||\widehat{x}|_{\mathfrak{M}(B)\setminus U}||_\infty < ||\widehat{x}|_U||_\infty \leqslant ||\widehat{x}||_\infty. \tag{4.1}$$

Istnieje więc $m \in \mathbb{N}$ takie, że element $y = \left(||\widehat{x}||_\infty^{-1} x\right)^m$ spełnia

$$||\widehat{y}||_\infty = 1 \text{ oraz } |\psi(y)| < \frac{1}{2nR} \text{ dla } \psi \in \mathfrak{M}(B) \setminus U$$

(druga nierówność wynika stąd, że y spełnia tę samą nierówność (4.1), co x, a jest ona ostra!). To pociąga za sobą dla $\psi \in \mathfrak{M}(B) \setminus U$ i każdego $i = 1, \ldots, n$

$$|\psi(y)\psi(b_i)| \leqslant ||\widehat{b_i}||_\infty |\psi(y)| < \frac{1}{2nR}.$$

Podobnie, dla $\psi \in U$,

$$|\psi(y)\psi(b_i)| \leqslant ||\widehat{y}||_\infty |\psi(b_i)| < \frac{1}{2nR}.$$

Łącząc te dwie nierówności i pamiętając, że

$$y = y \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

uzyskujemy

$$1 = ||\widehat{y}||_\infty \leqslant \sum_{i=1}^n ||\widehat{a_i}||_\infty \sup_{\eta \in \mathfrak{M}(A)} |\eta(y)\eta(b_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n ||\widehat{a_i}||_\infty \sup_{\psi \in \mathfrak{M}(B)} |\psi(y)\psi(b_i)| \leqslant R \sum_{i=1}^n \sup_{\psi \in \mathfrak{M}(B)} |\psi(y)\psi(b_i)| < \frac{1}{2}.$$

Ta sprzeczność dowodzi, iż $\ker\varphi \subset \ker\psi$ dla pewnego $\psi \in \mathfrak{M}(A)$, co kończy rozumowanie w przypadku, gdy obie algebry mają wspólną jedynkę. W przypadku ogólnym rozważamy A_e oraz B_e. Pamiętając, iż $\partial(B) \subset \partial(B_e)$ każdy element $\varphi \in \partial(B)$ rozszerza się do pewnego $\psi \in \mathfrak{M}(A_e)$. Nie może być to jednak funkcjonał ψ_∞, gdyż zeruje się on na A, a w szczególności na B. $\square$

Udowodnimy teraz twierdzenie analogiczne to Twierdzenia Rouchego z teorii funkcji analitycznych.

Twierdzenie 4.1.10. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką i załóżmy, że pewne elementy $x, y \in A$ spełniają*

$$|\widehat{x}(\varphi) - \widehat{y}(\varphi)| < |\widehat{x}(\varphi)|$$

dla wszystkich $\varphi \in \partial(A)$. Wówczas x jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy y jest odwracalny.

Dowód. Brzeg Szyłowa $\partial(A)$ jest zwartym podzbiorem $\mathfrak{M}(A)$, a funkcja

$$\varphi \mapsto |\widehat{x}(\varphi)| - |\widehat{x}(\varphi) - \widehat{y}(\varphi)|$$

jest ciągła, więc założenia twierdzenia implikują, że

$$c = \inf_{\varphi \in \partial(A)} \{|\widehat{x}(\varphi)| - |\widehat{x}(\varphi) - \widehat{y}(\varphi)|\} > 0.$$

Wybierzmy $n \in \mathbb{N}$ o własności $nc > r(x-y)$ i rozważmy ciąg

$$nx,\ (n-1)x + y, \ldots, (n-k)x + ky, \ldots, ny$$

elementów A. Przypuśćmy, że teza naszego twierdzenia jest fałszywa, czyli albo $nx \in G(A)$ i $ny \notin G(A)$, albo $nx \notin G(A)$ oraz $ny \in G(A)$. Dodatkowo, załóżmy iż odwracalność dowolnego elementu ciągu implikuje odwracalność wyrazu poprzedniego i następnego (jeśli istnieją). Wtedy jednak $nx \in G(A)$ pociąga za sobą $ny \in G(A)$ i na odwrót, co przeczy wcześniejszym obostrzeniom, więc istnieje $0 \leqslant k \leqslant n$, dla którego element $(n-k)x + ky$ jest odwracalny, ale wyraz poprzedni lub wyraz następny nie jest odwracalny. Połóżmy $l = k-1$, gdy $0 < k \leqslant n$ oraz

$$(n-(k-1))x + (k-1)y \notin G(A),$$

a w pozostałych przypadkach niech $l = k+1$. Przy takim wyborze element $(n-l)x + ly$ nie jest odwracalny, więc istnieje $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(A)$ taki, że

$$\varphi_0((n-l)x + ly) = 0.$$

Niech $z = ((n-k)x + ky)^{-1}$. Stąd

$$\begin{gathered}
r(x-y) < nc = \inf_{\varphi \in \partial(A)} \{n|\widehat{x}(\varphi)| - n|\widehat{x}(\varphi) - \widehat{y}(\varphi)|\} \\
\leqslant \inf_{\varphi \in \partial(A)} \{n|\widehat{x}(\varphi)| - k|\widehat{x}(\varphi) - \widehat{y}(\varphi)|\} \leqslant \inf_{\varphi \in \partial(A)} |n\widehat{x}(\varphi) - k(\widehat{x}(\varphi) - \widehat{y}(\varphi))| \\
= \inf_{\varphi \in \partial(A)} |\widehat{z}(\varphi)|^{-1} = \left(\sup_{\varphi \in \partial(A)} |\widehat{z}(\varphi)|\right)^{-1} = \left(\sup_{\varphi \in \mathfrak{M}(A)} |\widehat{z}(\varphi)|\right)^{-1} = \\
= \inf_{\varphi \in \mathfrak{M}(A)} |\widehat{z}(\varphi)|^{-1} \leqslant |n\widehat{x}(\varphi_0) - k(\widehat{x}(\varphi_0) - \widehat{y}(\varphi_0))| = \\
|n\widehat{x}(\varphi_0) - k(\widehat{x}(\varphi_0) - \widehat{y}(\varphi_0)) - (n-l)\widehat{x}(\varphi_0) - l\widehat{y}(\varphi_0)| = \\
= |(l-k)\widehat{x}(\varphi_0) + (k-l)\widehat{y}(\varphi_0)| = |\widehat{x}(\varphi_0) - \widehat{y}(\varphi_0)| \leqslant r(x-y).
\end{gathered}$$

Jest to sprzeczność dowodząca tezy twierdzenia. $\square$

Następne twierdzenie poda relację łączącą topologiczny brzeg spektrum elementu oraz obraz brzegu Szyłowa przy transformacie Gelfanda.

Twierdzenie 4.1.11. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha oraz $x \in A$. Wówczas*
$$\partial(\sigma(x)) \subset \widehat{x}(\partial(A)) \cup \{0\}.$$
Jeśli A ma jedynkę, to $\partial(\sigma(x)) \subset \widehat{x}(\partial(A))$.

Dowód. Rozważmy najpierw przypadek, gdy A ma jedynkę i weźmy $x \in A$. Wówczas $\partial(A) \subset \mathfrak{M}(A)$ jest zbiorem zwartym, więc z ciągłości transformaty Gelfanda $\widehat{x}(\partial(A))$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$. Zatem jeśli $\lambda_0 \notin \widehat{x}(\partial(A))$, to dla pewnego $\delta > 0$ mamy
$$\min_{\varphi \in \partial(A)} |\widehat{x}(\varphi) - \lambda_0| > \delta.$$

Gdyby, wbrew tezie, $\lambda_0 \in \partial(\sigma(x))$, to istniałaby liczba zespolona $\lambda_1 \notin \sigma(x)$ taka, że $|\lambda_0 - \lambda_1| < \frac{1}{2}\delta$. Dla dowolnego $\varphi \in \partial(A)$ zachodzi więc
$$|\widehat{x}(\varphi) - \lambda_1| \geqslant |\widehat{x}(\varphi) - \lambda_0| - |\lambda_0 - \lambda_1| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Przyjmijmy $y = (x - \lambda_1 e)^{-1}$ i zauważmy, że
$$r(y) = \max_{\varphi \in \partial(A)} \left| \frac{1}{\widehat{x}(\varphi) - \lambda_1} \right| = \left(\min_{\varphi \in \partial(A)} |\widehat{x}(\varphi) - \lambda_1| \right)^{-1} < \frac{2}{\delta}.$$

Dla pewnego $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(A)$ jest jednak $\widehat{x}(\varphi_0) = \lambda_0$, co prowadzi do
$$r(y) \geqslant |\widehat{y}(\varphi_0)| = |\lambda_0 - \lambda_1|^{-1} > \frac{2}{\delta}.$$

Przeczy to poprzedniemu oszacowaniu i dowodzi twierdzenia, gdy algebra A ma jedynkę. W ogólnym przypadku rozważamy algebrę z dołączoną jedynką A_e. Z udowodnionej części tezy dostajemy
$$\partial(\sigma(x)) \subset \widehat{x}(\partial(A_e)) \subset \widehat{x}(\partial(A) \cup \{\varphi_\infty\}) = \widehat{x}(\partial(A)) \cup \{0\},$$

gdzie w ostatnim zawieraniu posiłkowaliśmy się Faktem 4.1.8. □

Zobaczymy teraz rezultat o charakterze ilościowym.

Twierdzenie 4.1.12. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha i załóżmy, że $\partial(A) \neq \mathfrak{M}(A)$. Wówczas $\partial(A)$ składa się z nieskończenie wielu punktów.*

Dowód. Niech $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}(A)$. Pokażemy, że istnieje $a \in A$ o własności $\widehat{a}(\varphi) \neq 0$ oraz $\widehat{a}(\psi) = 0$ (to jest łatwe, jeśli algebra ma jedynkę!). Niech $x \in A$ będzie taki, że $\widehat{x}(\varphi) \neq \widehat{x}(\psi)$. Jeśli $\widehat{x}(\psi) = 0$, to znaleźliśmy odpowiedni element. W przypadku, gdy $\widehat{x}(\psi) \neq 0$ możemy założyć, że $\widehat{x}(\psi) = 1$, a więc $\widehat{x}(\varphi) \neq 1$. Jeżeli dodatkowo $\widehat{x}(\varphi) \neq 0$, to kładąc $a = x - x^2$ mamy $\widehat{a}(\psi) = 0$ oraz $\widehat{a}(\varphi) =$

$\widehat{x}(\varphi)(1-\widehat{x}(\varphi)) \neq 0$. Pozostaje przypadek $\widehat{x}(\varphi)=0$ oraz $\widehat{x}(\psi)=1$. Wybierzmy więc $y \in A$ o własnościach $\widehat{y}(\varphi) \neq 0$. Jeśli $\widehat{y}(\psi)=0$, to możemy przyjąć $a=y$. W przeciwnym wypadku, niech $a = x - \psi(y)^{-1}y$. Wówczas $\widehat{a}(\psi)=0$ oraz

$$\widehat{a}(\varphi) = \widehat{x}(\varphi) - \widehat{y}(\psi)^{-1}\widehat{y}(\varphi) = -\widehat{y}(\psi)^{-1}\widehat{y}(\varphi) \neq 0.$$

Teraz, niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ będzie skończonym podzbiorem $\partial(A)$ i wybierzmy $\varphi \in \mathfrak{M}(A) \setminus \partial(A)$. Dla każdego $i = 1, \ldots, n$ istnieje $a_i \in A$ takie, że $\widehat{a_i}(\varphi) \neq 0$ oraz $\widehat{a_i}(\varphi_i) = 0$. Niech $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Wówczas $\widehat{a}(\varphi) \neq 0$ oraz $\widehat{a}(\varphi_i) = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Zatem zbiór $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ nie może wyczerpywać całego $\partial(A)$, a stąd musi ono być nieskończone. □

Otrzymujemy stąd prosty wniosek.

Wniosek 4.1.13. *Jeśli $\partial(A)$ jest skończone, to $\mathfrak{M}(A) = \partial(A)$.*

W pewnych klasach algebr równość $\partial(A) = \mathfrak{M}(A)$ jest spełniona automatycznie. Przykład takiej klasy zobaczymy w najbliższej uwadze.

Uwaga 4.1.14. Niech A będzie przemienną, symetryczną algebrą Banacha z inwolucją. Wówczas $\partial(A) = \mathfrak{M}(A)$.

Dowód. Z twierdzenia Stone'a - Weierstrassa uzyskujemy z łatwością gęstość obrazu transformacji Gelfanda w $C_0(\mathfrak{M}(A))$. Stąd teza uwagi wynika już bez trudu, gdyż $\partial(C_0(\mathfrak{M}(A))) = \mathfrak{M}(A)$, a każdy element z $C_0(\mathfrak{M}(A))$ możemy jednostajnie przybliżyć transformatą Gelfanda pewnego elementu algebry. □

4.2 Rachunek funkcyjny jednej zmiennej

Niech K będzie zwartym podzbiorem otwartego zbioru $\Omega \subset \mathbb{C}$, a niech Γ oznacza rodzinę skończenie wiele prostowalnych łuków zorientowanych $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ w Ω, z których żaden nie przecina K. W tej sytuacji całkowanie po Γ jest zdefiniowane jako

$$\int_\Gamma \phi(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \phi(\lambda) d\lambda.$$

Jak wiemy z kursu funkcji analitycznych Γ można wybrać w taki sposób, aby

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\lambda}{\lambda - \xi} = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } \xi \in K \\ 0, \text{ jeśli } \xi \notin \Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

i żeby wzór całkowy Cauchy'ego

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - \xi)^{-1} f(\lambda) d\lambda$$

zachodził dla dowolnej funkcji holomorficznej f w Ω oraz dla każdego $\xi \in K$. Będziemy krótko określać sytuację taką, jak w równaniu (4.2) mówiąc, że kontur Γ otacza K w Ω.

Lemat 4.2.1. *Przypuśćmy, że A jest zespoloną algebrą Banacha z jedynką, $x \in A$ oraz $\alpha \in \mathbb{C}$, Ω jest dopełnieniem $\{\alpha\}$ w $\mathbb{C}$, a Γ otacza $\sigma(x)$ w Ω. Wówczas*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\alpha-\lambda)^n(\lambda e - x)^{-1}d\lambda = (\alpha e - x)^n \text{ dla } n \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. Oznaczmy całkę występującą po lewej stronie tezy przez y_n. Jeśli $\lambda \notin \sigma(x)$, to

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1}$$

(najłatwiej sprawdzić tę tożsamość mnożąc najpierw z prawej strony przez $(\lambda e - x)$, a potem z lewej przez $(\alpha e - x)$). Element algebry nie podlegający całkowaniu można wynieść przed całkę, a więc y_n jest sumą

$$(\alpha e - x)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\alpha-\lambda)^n d\lambda = 0,$$

bo $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ oraz

$$(\alpha e - x)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\alpha-\lambda)^{n+1}(\lambda e - x)^{-1}d\lambda.$$

Zatem $y_{n+1} = (\alpha e - x)y_n$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Musimy więc wykazać wzór

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda e - x)^{-1}d\lambda = e. \tag{4.3}$$

Niech Γ_r będzie dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w 0 i promieniu $r > ||x||$. Na Γ_r zachodzi tożsamość, której wielokrotnie już używaliśmy

$$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}x^n.$$

Całkowanie wyraz po wyrazie powyższego szeregu daje tezę z Γ_r w miejscu Γ. Jak pamiętamy z dowodu Twierdzenia 1.3.5 wyrażenie podcałkowe w równaniu (4.3) jest funkcją o wartościach w A, holomorficzną w dopełnieniu $\sigma(x)$ i ponieważ $\mathrm{Ind}_{\Gamma_r}(\xi) = 1 = \mathrm{Ind}_\Gamma(\xi)$ dla wszystkich $\xi \in \sigma(x)$, wzór całkowy Cauchy'ego gwarantuje, że całka nie zmieni się, gdy zastąpimy Γ_r przez Γ. □

Z ostatniego lematu udowodnimy bez trudu następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.2. *Niech*

$$R(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m,k} c_{m,k}(\lambda - \alpha_m)^{-k}$$

będzie funkcją wymierną z biegunami w punktach α_m (P jest wielomianem, a powyższa suma ma skończenie wiele składników). Jeśli $x \in A$ i $\sigma(x)$ nie zawiera żadnego bieguna R, to definiujemy

$$R(x) = P(x) + \sum_{m,k} c_{m,k}(x - \alpha_m e)^{-k}.$$

Jeśli Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ zawierającym $\sigma(x)$ takim, że R jest holomorficzna w Ω, oraz jeśli Γ otacza $\sigma(x)$ w Ω, to

$$R(x) = \int_\Gamma R(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Dowód. Wystarczy zastosować poprzedni lemat i liniowość całki. □

Możemy już przejść do kluczowych koncepcji.

Definicja 4.2.3. Niech A będzie zespoloną algebrą Banacha z jedynką, a Ω otwartym zbiorem w $\mathbb{C}$. Przez $H(\Omega)$ będziemy oznaczać algebrą wszystkich funkcji holomorficznych na Ω. Na mocy Twierdzenia 1.3.15 zbiór

$$A_\Omega = \{x \in A : \sigma(x) \subset \Omega\}$$

jest otwartym podzbiorem A. Dalej, definiujemy $H(A_\Omega)$ jako zbiór wszystkich funkcji $\widetilde{f}$ o wartościach w A, których dziedziną jest A_Ω i które powstają z $f \in H(\Omega)$ za pomocą wzoru

$$\widetilde{f}(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda. \tag{4.4}$$

Należy nam się parę komentarzy do tej definicji.

1. Ponieważ Γ omija $\sigma(x)$ oraz ponieważ operacja brania odwrotności jest ciągła wyrażenie podcałkowe (4.4) jest ciągłe, a więc całka istnieje i zadaje element A.

2. Wyrażanie podcałkowe jest funkcją holomorficzną o wartościach w A określoną w dopełnieniu $\sigma(x)$, a więc wzór całkowy Cauchy'ego implikuje, że $f(x)$ nie zależy od Γ, o ile tylko Γ otacza $\sigma(x) \subset \Omega$.

3. Jak można było już zauważyć będziemy często pomijać falkę i pisać po prostu $f(x)$ zamiast $\widetilde{f}(x)$.

Możemy już przejść do głównego twierdzenia.

Twierdzenie 4.2.4. *Niech A, $H(\Omega)$ i $H(A_\Omega)$ będą takie, jak w poprzedniej definicji. Wówczas $H(A_\Omega)$ jest algebrą zespoloną. Odwzorowanie $f \mapsto \widetilde{f}$ jest izomorfizmem algebr $H(\Omega)$ na $H(A_\Omega)$, który jest ciągły w następującym sensie: jeśli $f_n \in H(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ i $f_n \to f$ jednostajnie na zwartych podzbiorach Ω, to*

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{f_n}(x) \ (x \in A_\Omega).$$

Jeśli $u(\lambda) = \lambda$ i $v(\lambda) = 1$ w Ω, to $\widetilde{u}(x) = x$ oraz $\widetilde{v}(x) = e$ dla wszystkich $x \in A_\Omega$.

Dowód. Ostatnie zdanie jest konsekwencją Twierdzenia 4.2.2. Liniowość naszego odwzorowania wynika wprost z definicji. Ponadto, jeśli $\widetilde{f} = 0$, to $f(\alpha)e = \widetilde{f}(\alpha e) = 0$, a więc $f = 0$. Zatem $f \mapsto \widetilde{f}$ jest odwzorowaniem różnowartościowym.

Żądana ciągłość wynika bezpośrednio z przedstawienia całkowego, ograniczoności funkcji $||(\lambda e - x)^{-1}||$ na Γ i nierówności trójkąta dla całek z funkcji o wartościach wektorowych. Trzeba jeszcze udowodnić multiplikatywność odwzorowania $f \mapsto \widetilde{f}$, czyli biorąc $f, g \in H(\Omega)$, $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ powinniśmy otrzymać

$$\widetilde{h}(x) = \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x) \ (x \in A_\Omega). \tag{4.5}$$

Jeśli f i g są funkcjami wymiernymi to tezę zapewnia Twierdzenie 4.2.2. Ogólnie, twierdzenie Rungego pozwala nam przybliżać f oraz g funkcjami wymiernymi f_n i g_n w sposób jednostajny na zwartych podzbiorach Ω. Wówczas $f_n g_n$ jest zbieżny do h w ten sposób i równanie (4.5) wynika z udowodnionej już ciągłości odwzorowania $f \mapsto \widetilde{f}$. □

Zbadamy teraz dokładniej własności rachunku funkcyjnego.

Twierdzenie 4.2.5. *Niech $x \in A_\Omega$ i $f \in H(\Omega)$.*

1. *$f(x)$ jest odwracalna w A wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\lambda) \neq 0$ dla wszystkich $\lambda \in \sigma(x)$.*
2. *$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (twierdzenie o odwzorowaniu spektralnym)*

Dowód. 1. Jeśli f nie ma zer na $\sigma(x)$, to $g = 1/f$ jest holomorficzna na zbiorze otwartym Ω_1 takim, że $\sigma(x) \subset \Omega_1 \subset \Omega$. Ponieważ $fg = 1$ na Ω_1 Twierdzenie 4.2.4 daje $f(x)g(x) = e$, a więc $f(x)$ jest odwracalny. Odwrotnie, jeśli $f(\alpha) = 0$ dla pewnego $\alpha \in \sigma(x)$, to istnieje $h \in H(\Omega)$ takie, że

$$(\lambda - \alpha)h(\lambda) = f(\lambda) \ (\lambda \in \Omega),$$

co prowadzi do

$$(x - \alpha e)h(x) = f(x) = h(x)(x - \alpha e).$$

Element $x - \alpha e$ nie jest odwracalny w A, a więc nie jest odwracalny również element $f(x)$ (rozumujemy nie wprost i otrzymujemy, iż $x - \alpha e$ ma lewostronną oraz prawostronną odwrotność, co dzięki prostemu faktowi z algebry daje pełną odwracalność).
2. Niech $\beta \in \mathbb{C}$. Z definicji $\beta \in \sigma(f(x))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) - \beta e$ nie jest odwracalny w A. Z części pierwszej zastosowanej do $f - \beta$ jest to równoważne temu, że $f - \beta$ ma zero w $\sigma(x)$, czyli $\beta \in f(\sigma(x))$. □

Twierdzenie o odwzorowaniu spektralnym pozwoli nam włączyć operację składania do rachunku funkcyjnego.

Twierdzenie 4.2.6. *Niech $x \in A_\Omega$, $f \in H(\Omega)$, Ω_1 jest zbiorem otwartym zawierającym $f(\sigma(x))$, $g \in H(\Omega_1)$ i $h(\lambda) = g(f(\lambda))$ w $\Omega_0 = f^{-1}(\Omega_1)$. Wówczas $f(x) \in A_{\Omega_1}$ oraz $h(x) = g(f(x))$.*

Dowód. Na mocy twierdzenia o odwzorowaniu spektralnym $\sigma(f(x)) \subset \Omega_1$, a więc $g(f(x))$ jest dobrze zdefiniowane. Ustalmy kontur Γ_1 otaczający $f(\sigma(x))$ w Ω_1. Istnieje zbiór otwarty W taki, że $\sigma(x) \subset W \subset \Omega_0$ i tak mały, że

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(f(\lambda)) = 1 \ (\lambda \in W).$$

Niech jeszcze Γ_0 otacza $\sigma(x)$ w W. Jeśli $\xi \in \Gamma_1$, to $1/(\xi - f) \in H(W)$. Możemy zastosować Twierdzenie 4.2.4 do W zamiast Ω i uzyskamy

$$[\xi e - f(x)]^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}[\xi - f(\lambda)]^{-1}(\lambda e - x)^{-1}d\lambda \ (\xi \in \Gamma_1).$$

Γ_1 otacza $\sigma(f(x))$ w Ω_1, a więc definicja działania na elemencie algebry Banacha i poprzednie równanie prowadzi do

$$g(f(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(\xi)[\xi e - f(x)]^{-1}d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(\xi)[\xi - f(\lambda)]^{-1}d\xi(\lambda e - x)^{-1}d\lambda =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} g(f(\lambda))(\lambda e - x)^{-1}d\lambda = h(x).$$

□

Podamy teraz klasyczne zastosowanie rachunku funkcyjnego.

Twierdzenie 4.2.7. *Załóżmy, że A jest zespoloną algebrą Banacha z jedynką, $x \in A$ i $\sigma(x)$ nie oddziela 0 od ∞. Wówczas*

1. *x ma pierwiastki wszystkich rzędów w A,*
2. *x ma logarytm w A,*
3. *jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje wielomian P taki, że $||x^{-1} - P(x)|| < \varepsilon$.*

Ponadto, jeśli $\sigma(x)$ leży na dodatniej półosi rzeczywistej, to pierwiastki w punkcie 1. można wybrać tak, by również spełniały ten warunek.

Dowód. Z założenia 0 leży w nieograniczonej składowej dopełnienia $\sigma(x)$. Istnieje więc funkcja holomorficzna f w jednospójnym zbiorze otwartym $\Omega \supset \sigma(x)$, która spełnia

$$\exp(f(\lambda)) = \lambda.$$

Z poprzedniego twierdzenia wynika, że $\exp(f(x)) = x$, czyli $y = f(x)$ jest logarytmem x. Jeśli $0 < \lambda < \infty$ dla wszystkich $\lambda \in \sigma(x)$, to f można wybrać tak, aby przyjmowała wartości rzeczywiste na $\sigma(x)$, a więc na mocy twierdzenia o odwzorowaniu spektralnym $\sigma(y)$ leży na osi rzeczywistej. Dalej, niech $z = \exp(\frac{y}{n})$. Wtedy $z^n = x$ i kolejne zastosowania twierdzenia o odwzorowaniu spektralnym pokazuje, że $\sigma(x) \subset (0, \infty)$, o ile $\sigma(y) \subset \mathbb{R}$. Dla dowodu trzeciej części zauważmy, iż z twierdzenia Rungego można funkcję $\frac{1}{\lambda}$ aproksymować jednostajnie wielomianami na pewnym zbiorze otwartym zawierającym $\sigma(x)$. Ciągłość rachunku funkcyjnego zapewnia tezę. □

Na koniec, udowodnimy obiecane w podrodziale o funkcjonałach dodatnich twierdzenie o istnieniu hermitowskich pierwiastków w algebrze Banacha z inwolucją.

Twierdzenie 4.2.8. *Niech A będzie algebrą Banacha z inwolucją i jedynką oraz $x \in A$ elementem samosprzężonym takim, że $\sigma(x)$ nie zawiera rzeczywistych λ spełniających $\lambda \leqslant 0$. Wówczas istnieje element $y \in A$ taki, że $y = y^*$ oraz $y^2 = x$.*

Dowód. Każdy element hermitowski leży w pewnym maksymalnym podzbiorze normalnym, więc na mocy wyników z poprzedniego rozdziału wystarczy wykazać tezę twierdzenia w przypadku, gdy A jest przemienna. Niech $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \{0\})$. Wówczas istnieje $f \in H(\Omega)$ taka, że $f^2(\lambda) = \lambda$ i $f(1) = 1$. Ponieważ $\sigma(x) \subset \Omega$ możemy zdefiniować $y \in A$ jako

$$y = f(x).$$

Wówczas $y^2 = x$. Pozostaje więc wykazać, że $y^* = y$. Ponieważ Ω jest jednospójny, twierdzenie Rungego zapewnia istnienie wielomianów P_n, które zbiegają do f jednostajnie na zwartych podzbiorach Ω. Określmy nowe wielomiany Q_n za pomocą wzoru

$$Q_n(\lambda) = \frac{1}{2}\left(P_n(\lambda) + \overline{P_n(\overline{\lambda})}\right).$$

Mamy $f(\overline{\lambda}) = \overline{f(\lambda)}$, skąd wielomiany Q_n zbiegają do f w ten sam sposób, jaki robiły to wielomiany P_n. Przyjmijmy

$$y_n = Q_n(x) \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że wprost z definicji Q_n są to wielomiany o współczynnikach rzeczywistych. Z samosprzężoności x wynika w związku z tym samosprzężoność y_n. Z twierdzenia o ciągłości rachunku funkcyjnego

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n.$$

Gdybyśmy założyli ciągłość inwolucji, to zbiór elementów hermitowskich byłby domknięty i otrzymalibyśmy stąd $y = y^*$. W ogólnym przypadku, niech $R = \mathrm{rad}(A)$ oraz $\pi : A \mapsto A/R$ rzutowaniem kanonicznym. Jeśli $\pi(x) = \pi(y)$ dla pewnych $x, y \in A$, to $z = x - y \in R$, a więc $z^* \in R$, ponieważ $r(z^*) = r(z) = 0$. Zatem $\pi(x^*) = \pi(y^*)$. W ten sposób uzasadniliśmy, że wzór

$$[\pi(a)]^* = \pi(a^*) \text{ dla } a \in A$$

zadaje inwolucję w A/R. Jeśli $a \in A$ jest hermitowski, to również $\pi(a)$ jest hermitowski. Z ciągłości π wynika, że $\pi(y_n) \to \pi(y)$. Algebra ilorazowa A/R jest izomorficzna z $\widehat{A}$, więc A/R jest półprosta i wobec tego każda inwolucja na A/R jest ciągła. Stąd $\pi(y)$ jest hermitowski, a zatem $\pi(y) = \pi(y^*)$. Ostatnie zdanie jest równoważne stwierdzeniu, iż $y^* - y \in R$. Rozłóżmy teraz standardowo element y, to znaczy $y = u + iv$ dla pewnych hermitowskich $u, v \in A$. Z tego, co udowodniliśmy przed chwilą wynika, że $v \in R$. Ponadto, $x = y^2$, co prowadzi do

$$x = u^2 - v^2 + 2iuv.$$

Niech teraz $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$. Jak pamiętamy, $v \in R$, a więc $\varphi(v) = 0$. Ostatnie równanie daje teraz $\varphi(x) = \varphi(u)^2$. Z założenia jednak $0 \notin \sigma(x)$. Zatem $\varphi(x) \neq 0$, a więc $\varphi(u) \neq 0$. Oznacza to, że u jest odwracalny. Poza tym, $x = x^*$ implikuje $uv = 0$. Ostatecznie, $v = u^{-1}uv$, czyli $v = 0$. □

4.3 Rachunek funkcyjny wielu zmiennych

Wprowadzimy najpierw ważne pojęcie *spektrum łącznego* układu elementów przemiennej algebry Banacha.

Definicja 4.3.1. Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha z jedynką i niech $x_1, \ldots, x_n \in A$. Określamy spektrum łączne elementów $x_1, \ldots, x_n$ jako zbiór

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \{(\widehat{x_1}(\varphi), \ldots, \widehat{x_n}(\varphi)) \in \mathbb{C}^n : \varphi \in \mathfrak{M}(A)\}.$$

$\mathfrak{M}(A)$ jest zwarte oraz transformaty Gelfanda elementów są ciągłe, skąd od razu wynika zwartość spektrum łącznego.

Rozpatrując spektra pojedynczych elementów zaczynaliśmy od definicji czysto algebraicznej. Tego typu opis istnieje również dla spektrum łącznego, o czym mówi poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 4.3.2. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha z jedynką i niech $x_1, \ldots, x_n \in A$. Wówczas*

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n : \text{ dla dowolnych } y_1, \ldots, y_n \in A$$
$$\text{element } \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \lambda_i e) \text{ jest nieodwracalny w algebrze } A\}.$$

Dowód. Oznaczmy zbiór występujący po prawej stronie dowodzonej równości przez P. Zauważmy, że zbiór elementów postaci $y = \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \lambda_i e)$, gdzie $y_i \in A$ jest albo ideałem właściwym algebry A, albo całą algebrą A. Jeśli więc składa się on tylko z elementów nieodwracalnych, to jest on zawarty w pewnym ideale maksymalnym $M_0 \in \mathrm{Max}(A)$. Niech $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(A)$ będzie taki, że $\ker\varphi_0 = M_0$. Dla dowolnych elementów $y_i \in A$ mamy

$$\varphi_0(y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_0(y_i)(\varphi_0(x_i) - \lambda_i) = 0.$$

Kładąc $y_i = \delta_{ij} e$ otrzymamy $\varphi_0(x_i) = \lambda_i$, a więc

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\varphi_0(x_1), \ldots, \varphi_0(x_n)) \in \sigma(x_1, \ldots, x_n).$$

Stąd $P \subset \sigma(x_1, \ldots, x_n)$. W drugą stronę, jeżeli $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \sigma(x_1, \ldots, x_n)$, to istnieje $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ taki, że $\varphi(x_i) = \lambda_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Dla każdego elementu y postaci

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \lambda_i e) \text{ mamy } \varphi(y) = 0$$

i element y jest nieodwracalny w algebrze A. Wynika stąd inkluzja w drugą stronę, co kończy dowód twierdzenia. □

Zbiór po prawej stronie równości z ostatniego twierdzenia mógłby posłużyć za definicję spektrum łącznego w dowolnej (niekoniecznie przemiennej) algebrze Banacha. Ta koncepcja nie wytrzymała jednak próby czasu.
Zastanowimy się teraz nad ciągłością spektrum łącznego. Zacznijmy od formalnej definicji.

Definicja 4.3.3. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że funkcja $\Phi : X \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ odwzorowująca przestrzeń metryczną X z metryką d w rodzinę wszystkich podzbiorów $\mathbb{C}^n$ jest ciągła w punkcie $x \in X$, jeżeli dla dowolnego otoczenia V w przestrzeni $\mathbb{C}^n$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że z nierówności $d(x, y) < \delta$ wynikają zawierania

$$\Phi(x) \subset \Phi(y) + V$$
$$\Phi(y) \subset \Phi(x) + V,$$

gdzie

$$\Phi(z) + V = \{p \in \mathbb{C}^n : p = p_1 + p_2, p_1 \in \Phi(z), p_2 \in V\}.$$

Jeżeli z nierówności $d(x, y) < \delta$ wynika tylko drugie zawieranie, to mówimy, że funkcja Φ jest *półciągła z góry.*

Warto odnotować, iż w Twierdzeniu 1.3.15 wykazaliśmy półciągłość z góry spektrum pojedynczego elementu (niekoniecznie przemiennej) algebry Banacha. W ogólności, nie można spodziewać się niczego więcej, o czym dobitnie świadczy przykład Kakutaniego z książki Rickarta, który można również znaleźć w książce Żelazki. Dodatkowe założenie przemienności algebry istotnie zmienia sytuację.

Twierdzenie 4.3.4. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha z jedynką. Wówczas spektrum łączne elementów $x_1, \ldots, x_n \in A$ traktowane jako odwzorowanie produktu A^n w rodzinę podzbiorów przestrzeni $\mathbb{C}^n$ jest odwzorowaniem ciągłym.*

Dowód. Zacznijmy od drugiego zawierania. Przypuśćmy, że teza twierdzenia jest fałszywa. Istnieje więc układ elementów $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} \in A$ i takie otwarte otoczenie zera V w przestrzeni $\mathbb{C}^n$, iż przy każdym $k \in \mathbb{N}$ istnieją elementy $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)} \in A$ i funkcjonał $\varphi_k \in \mathfrak{M}(A)$ takie, że

$$||x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|| < \frac{1}{k} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.6}$$

oraz

$$(\varphi_k(x_1^k), \ldots, \varphi_k(x_n^{(k)})) \notin \sigma(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) + V.$$

Ponieważ

$$|\varphi_k(x_i^{(k)})| \leqslant ||x_i^{(k)}|| \leqslant ||x_i^{(0)}|| + 1 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n$$

ciągi $\{\varphi_k(x_i^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ są ograniczone, to przechodząc ewentualnie do podciągów możemy założyć, że są one zbieżne. Przyjmijmy

$$\lambda_i = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_i^{(k)}).$$

Zarówno V, jak i $\sigma(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) + V$ są otwarte, a stąd

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \notin \sigma(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) + V$$

i w szczególności $\lambda \notin \sigma(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Z poprzedniego twierdzenia istnieją elementy $y_1, \ldots, y_n \in A$ takie, że

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i^{(0)} - \lambda_i e) = e. \tag{4.7}$$

Ze względu na fakt, iż zbiór elementów odwracalnych algebry Banacha jest otwarty oraz

$$x_i^{(0)} = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}$$

możemy we wzorze (4.7) elementy $x_i^{(0)} - \lambda_i e$ zastąpić odpowiednio bliskimi elementami $x_i^{(k)} - \varphi_k(x_i^{(k)})e$ tak, że otrzymamy element odwracalny

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i^{(k)} - \varphi_k(x_i^{(k)})e),$$

co jest wykluczone, bo $\varphi_k(y) = 0$.
Pierwszą inkluzję również udowodnimy nie wprost. Zaprzeczając tezę otrzymamy istnienie otwartego otoczenia zera $V \subset \mathbb{C}^n$, $V = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : |\lambda| < \varepsilon\}$ takiego, że przy każdym $k \in \mathbb{N}$ istnieją $x_i^{(k)}$ czyniące zadość nierównościom (4.6) i funkcjonał $\varphi_k \in \mathfrak{M}(A)$ taki, że

$$(\varphi_k(x_1^{(0)}), \ldots, \varphi_k(x_n^{(0)})) \notin \sigma(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) + V.$$

Podobnie jak wcześniej $x_i^{(k)} \to x_i^{(0)}$ oraz możemy założyć, że istnieją granice $\varphi_k(x_i^{(0)}) \to \lambda_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Kładąc

$$\lambda^{(k)} = (\varphi_k(x_1^{(0)}), \ldots, \varphi_k(x_n^{(0)}))$$

mamy dla $k > K \in \mathbb{N}$, $\lambda^{(k)} - \lambda^{(0)} \in \frac{1}{2}V$ i skoro $\lambda^{(k)} \notin \sigma(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, to

$$\lambda^{(0)} \notin \sigma(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) + \frac{1}{2}V \text{ dla } k > K. \tag{4.8}$$

Z drugiej strony $\lambda^{(k)} \in \sigma(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ i $\lambda^{(k)} \to \lambda^{(0)}$, a więc zwartość spektrum łącznego implikuje $\lambda^{(0)} \in \sigma(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ i istnieje funkcjonał $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(A)$ taki, że $\varphi_0(x_i^{(0)}) = \lambda_i^{(0)}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Przyglądając się relacji (4.8) stwierdzamy z łatwością, iż jest ona równoważna nierówności

$$\sup_{\varphi \in \mathfrak{M}(A)} |\lambda^{(0)} - (\varphi(x_1^{(k)}), \ldots, \varphi(x_n^{(k)}))| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ dla } k > K,$$

czyli również

$$|(\varphi_0(x_1^{(0)}), \ldots, \varphi_0(x_n^{(0)})) - (\varphi_0(x_1^{k}), \ldots, \varphi_0(x_n^{(k)}))| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ dla } k > K.$$

Jest to oczywista sprzeczność, gdyż

$$\lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

□

Po zbadaniu podstawowych własności spektrum łącznego przejdziemy teraz do tytułowego zagadnienia bieżącego podrozdziału.
W naszych rozważaniach użyjemy niełatwego *twierdzenia Oka o rozszerzaniu*, którego dowodu tutaj nie przedstawiamy.

Twierdzenie 4.3.5 (Oka o rozszerzaniu)**.** *Niech $p_1, \ldots, p_m$ będą wielomianami n zmiennych zespolonych. Określmy odwzorowanie $\pi : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^{n+m}$ wzorem*

$$\pi(z) = (z, p_1(z), \ldots, p_m(z)).$$

Jeśli f jest funkcją holomorficzną na otwartym otoczeniu $\pi^{-1}(\mathbb{D}^{n+m})$, to istnieje funkcja holomorficzna F określona na otoczeniu $\mathbb{D}^{n+m}$ taka, że

$$F(\pi(z)) = f(z) \text{ dla wszystkich } z \in \pi^{-1}(\mathbb{D}^{n+m}).$$

Przeformułujemy teraz ostatnie twierdzenie tak, aby bardziej odpowiadało naszym potrzebom.

Stwierdzenie 4.3.6. *Niech $n, m \in \mathbb{N}$, $c_j > 0$ dla $1 \leqslant j \leqslant n+m$ oraz $p_1, \ldots, p_m$ będą wielomianami n zmiennych zespolonych. Przyjmijmy również*

$$D = \{z \in \mathbb{C}^{n+m} : |z_j| \leqslant c_j,\ j = 1, \ldots, n+m\}.$$

Jeśli f jest funkcją holomorficzną na otwartym otoczeniu $\pi^{-1}(D)$, to istnieje funkcja F holomorficzna na otwartym otoczeniu D taka, że $F(\pi(z)) = f(z)$ dla $z \in \pi^{-1}(D)$.

Dowód. Wprowadźmy trzy funkcje pomocnicze: $\rho : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$, $\sigma : \mathbb{C}^{n+m} \mapsto \mathbb{C}^{n+m}$, $\tau : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^{n+m}$ za pomocą wzorów

$$\rho(w_1, \ldots, w_n) = (c_1 w_1, \ldots, c_n w_n),$$
$$\sigma(w_1, \ldots, w_{n+m}) = (\frac{w_1}{c_1}, \ldots, \frac{w_{n+m}}{c_{n+m}}),$$
$$\tau(w_1, \ldots, w_n) = \left(w_1, \ldots, w_n, \frac{p_1(\rho(w))}{c_{n+1}}, \ldots, \frac{p_m(\rho(w))}{c_{n+m}}\right).$$

Sprawdzamy bez trudu, że $\tau(w) = \sigma(\pi(\rho(w)))$ dla $w \in \mathbb{C}^n$, $\sigma(D) = \mathbb{D}^{n+m}$, $\tau^{-1}(\mathbb{D}^{n+m}) = \rho^{-1}(\pi^{-1}(D))$. Niech U będzie otwartym otoczeniem $\pi^{-1}(D) \subset \mathbb{C}^n$ i niech f będzie funkcją holomorficzną na U (piszemy krótko $f \in H(U)$). Wówczas $\rho^{-1}(U)$ jest otwartym otoczeniem $\tau^{-1}(\mathbb{D}^{n+m})$ i $f \circ \rho \in H(\rho^{-1}(U))$. Z twierdzenia Oka istnieje otwarte otoczenie V zbioru $\mathbb{D}^{n+m}$ i funkcja holomorficzna G taka, że

$$G(\tau(w)) = (f \circ \rho)(w) \text{ dla } w \in \tau^{-1}(\mathbb{D}^{n+m}).$$

Przyjmijmy $F = G \circ \sigma$. Wówczas F jest holomorficzna na $\sigma^{-1}(V)$, które jest otwartym otoczeniem D. Jeśli $z \in \pi^{-1}(D)$, to $z = \rho(w)$ dla pewnego $w \in \tau^{-1}(\mathbb{D}^{n+m})$, a więc mamy

$$f(z) = f(\rho(w)) = G(\tau(w)) = G(\sigma(\pi(\rho(w)))) = F(\pi(z)).$$

□

Najbliższy lemat pozwoli sprowadzić nasze główne zadanie do algebr o skończonej liczbie generatorów.

Lemat 4.3.7. *Niech $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ oraz U - otwarte otoczenie $\sigma_A(x)$ w $\mathbb{C}^n$. Wówczas istnieje skończeniegenerowana domknięta podalgebra $B \subset A$ zawierająca $e, x_1, \ldots, x_n$ taka, że $\sigma_B(x) \subset U$.*

Dowód. Niech $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \sigma_A(x)$. Z Twierdzenia 4.3.2 istnieje $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ takie, że

$$\sum_{j=1}^{n} (z_j e - x_j) y_j = e.$$

Ustalmy to y i rozważmy $B(z)$ - podalgebrę algebry A generowaną przez

$$e, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n.$$

Wówczas $z \notin \sigma_{B(z)}(x)$, bo inaczej $\psi(e) = 0$ dla pewnego $\psi \in \mathfrak{M}(B(z))$. Wybierzmy otwarte otoczenie $U(z)$ punktu z w $\mathbb{C}^n$ o własności $U(z) \cap \sigma_{B(z)}(x) = \emptyset$ i niech

$$C = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| \leqslant ||x_j|| \text{ dla } j = 1, \ldots, n\}.$$

$C \setminus U$ jest zwarty i $\sigma_A(x) \subset U$, a więc możemy znajdować punkty $z^{(j)} \in C \setminus U$, a następnie związywać z nimi algebry $B(z^{(j)})$. Ze zwartości $C \setminus U$ istnieje skończenie wiele $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)} \in C \setminus U$ o własności

$$C \setminus U \subset \bigcup_{k=1}^{m} U(z^{(k)}).$$

Każda algebra $B(z^{(k)})$ jest skończeniegenerowana, a więc istnieje skończeniegenerowana podalgebra $B \subset A$ taka, że $B(z^{(k)}) \subset B$ dla $k = 1, \ldots, m$. Teraz

$$\sigma_B(x) \cap U(z^{(k)}) \subset \sigma_{B(z^{(k)})}(x) \cap U(z^{(k)}) \text{ dla każdego } k \in \mathbb{N}.$$

Sumując po k otrzymujemy $\sigma_B(x) \cap (C \setminus U) = \emptyset$. Pamiętając, że $\sigma_B(x) \subset C$ dostajemy $\sigma_B(x) \subset U$. □

Czas na drugi lemat pomocniczy.

Lemat 4.3.8. *Niech $\{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie zbiorem generatorów algebry Banacha A i niech $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \sigma_A(x_1, \ldots, x_n)$. Wówczas istnieje wielomian p taki, że $|p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| > 1 + ||p(x_1, \ldots, x_n)||$.*

Dowód. Korzystając ponownie z Twierdzenia 4.3.2 dostajemy istnienie $y_1 \ldots, y_n \in A$ takich, że

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j e - x_j) y_j = e.$$

Weźmy $\delta > 0$ czyniące zadość nierówności

$$\delta \cdot \sum_{j=1}^{n} ||\lambda_j e - x_j|| < \frac{1}{2}.$$

Z założenia istnieją wielomiany q_j takie, że

$$||q_j(x_1, \ldots, x_n) - y_j|| < \delta, \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Przyjmijmy

$$q(z_1, \ldots, z_n) = 1 - \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - z_j) q_j(z_1, \ldots, z_n).$$

Wówczas $q(\lambda) = 1$. Sprawdzamy teraz bez trudu nierówność

$$||q(x_1, \ldots, x_n)|| \leqslant \sum_{j=1}^{n} ||x_j - \lambda_j e|| \cdot ||y_j - q_j(x_1, \ldots, x_n)|| < \frac{1}{2}.$$

Kładąc $p = ||q(x_1, \ldots, x_n)||^{-1} q$ otrzymujemy[1]

$$|p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| > 2 = 1 + ||p(x_1, \ldots, x_n)||.$$

□

Zbliżające się stwierdzenie jest już ostatnią częścią przygotowania do dowodu głównego twierdzenia.

Stwierdzenie 4.3.9. *Niech $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ oraz U - otwarte otoczenie $\sigma_A(x)$ w $\mathbb{C}^n$. Wówczas istnieją elementy $x_{n+1}, \ldots, x_N \in A$ o następującej własności: dla $f \in H(U)$ istnieje funkcja holomorficzna F na pewnym otwartym otoczeniu $\{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| \leqslant 1 + ||x_j||, \ 1 \leqslant j \leqslant N\}$ taka, że*

$$f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = F(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_N)) \ \text{dla} \ \varphi \in \mathfrak{M}(A).$$

[1] Jeśli $q(x_1, \ldots, x_n) = 0$, to zamiast wielomianów q_j należy wziąć ich małe zaburzenie.

Dowód. Z Lematu 4.3.7 istnieje skończeniegenerowana domknięta podalgebra $B \subset A$ zawierająca $e, x_1 \dots, x_n$ taka, że $\sigma_B(x) \subset U$. Wybierzmy $x_{n+1}, \dots, x_k \in B$ tak, aby $x_1, \dots, x_k$ generowało B. Dla $z \in \mathbb{C}^k \setminus \sigma_A(x_1, \dots, x_k)$ z Lematu 4.3.8 istnieje wielomian p o k zmiennych zespolonych taki, że $|p(z)| > 1 + ||p(x)||$, a więc $|p(w)| > 1 + ||p(x)||$ dla wszystkich w z pewnego otoczenia z w $\mathbb{C}^k$. Niech P będzie rzutowaniem $(z_1, \dots, z_k) \mapsto (z_1, \dots, z_n)$ $\mathbb{C}^k$ na $\mathbb{C}^n$ i niech

$$D = \{z \in \mathbb{C}^k : |z_j| \leqslant 1 + ||x_j|| \text{ dla } j = 1, \dots, k\}.$$

Wówczas $D \backslash P^{-1}(U)$ jest zbiorem zwartym mieszczącym się w $\mathbb{C}^k \backslash \sigma_A(x_1, \dots, x_k)$, gdyż

$$P(\sigma_A(x_1, \dots, x_k)) = \sigma_A(x_1, \dots, x_n).$$

Znów korzystając z Lematu 4.3.8 i zwartości $D \backslash P^{-1}(U)$ istnieje skończeniewiele wielomianów $p_1, \dots, p_m$ k zmiennych zespolonych takich, że dla każdego $z \in D \setminus P^{-1}(U)$ mamy $|p_j(z)| > 1 + ||p_j(x)||$ dla przynajmniej jednego $j \in \{1, \dots, m\}$. Teraz, niech $N = k + m$ oraz $x_{k+j} = p_j(x)$ dla $j = 1, \dots, m$ i

$$C = \{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| \leqslant 1 + ||x_j|| \text{ dla } j = 1, \dots, N\}.$$

Przyjmijmy również tak, jak wcześniej $\pi : \mathbb{C}^k \mapsto \mathbb{C}^N$

$$\pi(z) = (z, p_1(z), \dots, p_m(z)) \text{ dla } z \in \mathbb{C}^k.$$

Skoro $\pi(z) \in C$ pociąga za sobą $|p_j(z)| \leqslant 1 + ||p_j(x)||$ dla $j = 1, \dots, m$ oraz $z \in D$, to mamy $\pi^{-1}(C) \subset P^{-1}(U)$[2]. Dalej, $f \circ P$ jest holomorficzna na otwartym otoczeniu $P^{-1}(U)$ zbioru $\pi^{-1}(C)$, a więc ze Stwierdzenia 4.3.6 istnieje funkcja holomorficzna F określona na otwartym otoczeniu zbioru C taka, że

$$F(\pi(z)) = f(P(z)) \text{ dla } z \in \pi^{-1}(C).$$

Dla $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ i $j = 1, \dots, m$ mamy

$$p_j(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k)) = \varphi(p_j(x_1, \dots, x_k)) = \varphi(x_{k+j}),$$

a zatem $\pi(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k)) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N))$. Pamiętając, że $|\varphi(x_j)| \leqslant ||x_j||$ dla $j = 1, \dots, k$ otrzymujemy

$$|p_j(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k))| \leqslant ||p_j(x_1, \dots, x_k)|| \text{ dla } j = 1, \dots, m.$$

Stąd mamy $\pi(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k)) \in C$, a więc $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k)) \in \pi^{-1}(C)$. Zatem

$$f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = f(P(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k))) =$$
$$F(\pi(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k))) = F(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N)).$$

□

[2] Proszę zwrócić uwagę na opis $D \setminus P^{-1}(U)$ w terminach wielomianów $(p_j)_{j=1}^m$

Możemy już udowodnić twierdzenie o rachunku funkcyjnym wielu zmiennych.

Twierdzenie 4.3.10. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha z jedynką i niech $x_1, \ldots, x_n \in A$. Niech ponadto f będzie funkcją holomorficzną na n zmiennych, która jest określona na pewnym zbiorze otwartym zawierającym $\sigma_A(x_1, \ldots, x_n)$. Wówczas istnieje $x \in A$ takie, że*

$$\widehat{x}(\varphi) = f(\widehat{x_1}(\varphi), \ldots, \widehat{x_n}(\varphi)) \text{ dla wszystkich } \varphi \in \mathfrak{M}(A).$$

Dowód. Z ostatniego twierdzenia istnieją $x_{n+1}, \ldots, x_N \in A$ i funkcja holomorficzna F określona na otwartym otoczeniu polidysku

$$D = \{z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N : |z_j| \leqslant 1 + ||x_j||, \ j = 1, \ldots, N\}.$$

o własności

$$f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = F(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_N)) \text{ dla } \varphi \in \mathfrak{M}(A).$$

Funkcja F jako holomorficzna ma rozwinięcie na szereg potęgowy postaci

$$F(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^N} \lambda_k z_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot z_N^{k_N}, \text{ gdzie } k = (k_1, \ldots, k_N)$$

zbieżne do niej w otoczeniu polidysku D, a więc zbieżne bezwzględnie na D. Wynika stąd, że możemy określić element $y \in A$ za pomocą wzoru

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^N} \lambda_k x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{k_N}.$$

Teraz, sprawdzamy bez trudu

$$\widehat{x}(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^N} \lambda_k \varphi(x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \varphi(x_N)^{k_N} =$$
$$F(\widehat{x_1}(\varphi), \ldots, \widehat{x_N}(\varphi)) = f(\widehat{x_1}(\varphi), \ldots, \widehat{x_n}(\varphi)).$$

□

4.4 Twierdzenie Szyłowa o idempotentach

W tym podrozdziale udowodnimy głębokie twierdzenie Szyłowa, które orzeka, iż w przemiennej, zespolonej algebrze Banacha A każdemu zwarto - otwartemu podzbiorowi $\mathfrak{M}(A)$ odpowiada idempotent.
Zacznijmy od prostego lematu.

Lemat 4.4.1. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha i niech $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{M}(A)$ będą dwoma różnymi funkcjonałami liniowo - multiplikatywnymi. Wówczas istnieje $x \in A$ takie, że $\varphi_1(x) = 1$ i $\varphi_2(x) = 0$.*

Dowód. Zbiór transformat Gelfanda silnie oddziela punkty $\mathfrak{M}(A)$, a więc istnieją elementy $a_1, a_2, b \in A$ takie, że $\varphi_1(a_1) \neq 0$, $\varphi_2(a_2) \neq 0$ oraz $\varphi_1(b) \neq \varphi_2(b)$. Przyjmijmy

$$c_j = \frac{1}{\varphi_j(a_j)} a_j \text{ dla } j = 1, 2$$

oraz $c = c_1 + c_2 - c_1 c_2$. Wówczas

$$\varphi_j(c) = \varphi_j(c_1) + \varphi_j(c_2) - \varphi_j(c_1)\varphi_j(c_2) = 1 \text{ dla } j = 1, 2.$$

Połóżmy

$$x = \frac{1}{\varphi_1(b) - \varphi_2(b)}(b - \varphi_2(b)c).$$

Bez trudu widzimy, że x spełnia tezę. $\square$

Następne stwierdzenie to w istocie twierdzenie Szyłowa dla algebr półprostych.

Stwierdzenie 4.4.2. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką i niech U_1, U_2 będą rozłącznymi, otwartymi podzbiorami $\mathfrak{M}(A)$ takimi, że $\mathfrak{M}(A) = U_1 \cup U_2$. Wówczas istnieje $x \in A$ o własności $\widehat{x}|_{U_1} = 0$ oraz $\widehat{x}|_{U_2} = 1$.*

Dowód. Dla $\varphi \in U_1$ i $\psi \in U_2$ z poprzedniego lematu dostajemy istnienie $a_{\varphi,\psi} \in A$ spełniającego $\varphi(a_{\varphi,\psi}) = 0$ oraz $\psi(a_{\varphi,\psi}) = 1$. Przyjmijmy

$$V_{\varphi,\psi} = \left\{\sigma \in U_1 : |\sigma(a_{\varphi,\psi})| < \frac{1}{2}\right\} \text{ i } W_{\varphi,\psi} = \left\{\tau \in U_2 : |\tau(a_{\varphi,\psi})| > \frac{1}{2}\right\}.$$

Wówczas zbiory $V_{\varphi,\psi}$, $W_{\varphi,\psi}$ są otwartymi otoczeniami φ i ψ (odpowiednio) oraz $V_{\varphi,\psi} \subset U_1$, $W_{\varphi,\psi} \subset U_2$. Ustalmy teraz $\psi \in U_2$. Skoro U_1 jest otwarto - zwarty, to istnieje skończony podzbiór $E_\psi \subset U_1$ taki, że

$$U_1 = \bigcup_{\varphi \in E_\psi} V_{\varphi,\psi}$$

Zatem, jeśli $\sigma \in U_1$, to $|\sigma(a_{\varphi,\psi})| < \frac{1}{2}$ dla przynajmniej jednego $\varphi \in E_\psi$. Z drugiej strony,

$$W_\psi = \bigcap_{\varphi \in E_\psi} W_{\varphi,\psi}$$

jest otwartym otoczeniem ψ w U_2. Skoro U_2 jest zwarte, to istnieją $\psi_1, \ldots, \psi_m \in U_2$ takie, że

$$U_2 = \bigcup_{j=1}^{m} W_{\psi_j}.$$

Dalej, rozważmy skończony zbiór elementów A

$$M = \{a_{\varphi,\psi_j} : 1 \leqslant j \leqslant m,\ \varphi \in E_{\psi_j}\}.$$

i ponumerujmy go otrzymując $M = \{x_1, \ldots, x_r\}$ dla pewnego $r \in \mathbb{N}$. Niech

$$C_j = \{(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_r)) : \varphi \in U_j\} \text{ dla } j = 1, 2.$$

Wówczas C_1, C_2 są zwarte oraz ze względu na równość $U_1 \cup U_2 = \mathfrak{M}(A)$ mamy

$$C_1 \cup C_2 = \sigma(x_1, \ldots, x_r).$$

Załóżmy, że $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Wówczas istnieją $\sigma \in U_1$ oraz $\tau \in U_2$ spełniające $\sigma(a_{\varphi,\psi_j}) = \tau(a_{\varphi,\psi_j})$ dla $1 \leqslant j \leqslant m$ oraz wszystkich $\varphi \in E_{\psi_j}$. Teraz, $\tau \in W_{\psi_j}$ dla pewnego j, a także $\sigma \in V_{\varphi,\psi_j}$ dla pewnego $\varphi \in E_{\psi_j}$. Z definicji W_{ψ_j} dostajemy $\tau \in W_{\varphi,\psi_j}$, a zatem

$$|\sigma(a_{\varphi,\psi_j})| < \frac{1}{2} \text{ oraz } |\tau(a_{\varphi,\psi_j})| > \frac{1}{2},$$

co oczywiście jest niemożliwe. W ten sposób wykazaliśmy, że C_1 i C_2 są rozłącznymi, zwartymi podzbiorami $\mathbb{C}^r$. Możemy więc znaleźć otwarte i rozłączne ich otoczenia W_1, W_2 (odpowiednio).
Określmy $f : W_1 \cup W_2 \mapsto \mathbb{C}$ poprzez $f|_{W_1} = 0$ i $f|_{W_2} = 1$. Wówczas f jest funkcją holomorficzną na otoczeniu $W_1 \cup W_2$ zbioru $\sigma(x_1, \ldots, x_r)$. Z twierdzenia o rachunku funkcyjnym wielu zmiennych istnieje $x \in A$ takie, że

$$\widehat{x}(\varphi) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_r)) \text{ dla wszystkich } \varphi \in \mathfrak{M}(A).$$

Stąd $\widehat{x}(\varphi) = 0$ dla wszystkich $\varphi \in U_1$ oraz $\widehat{x}(\varphi) = 1$ dla wszystkich $\varphi \in U_2$. $\square$

Aby przejść do przypadku ogólnego potrzebujemy poniższego lematu.

Lemat 4.4.3. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha z jedynką. Jeżeli $x \in A$ oraz $x^2 - x \in \operatorname{rad}(A)$, to istnieje taki element $y \in A$, że $y - x \in \operatorname{rad}(A)$ oraz $y^2 = y$.*

Dowód. Niech $z_0 \in \operatorname{rad}(A)$ i przyjmijmy

$$z_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4z_0)^k.$$

Definicja elementu z_1 jest poprawna, gdyż jest to rozwinięcie na szereg potęgowy funkcji $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4z_0})$, które ma dodatni promień zbieżności, a $z_0 \in \operatorname{rad}(A)$. Stąd

$$z_1^2 - z_1 + z_0 = 0.$$

Zatem dla dowolnego $z_0 \in \operatorname{rad}(A)$ równanie $x^2 - x + z_0 = 0$ ma rozwiązanie w $\operatorname{rad}(A)$. Weźmy teraz element $x \in A$ spełniający założenia lematu, czyli $x^2 - x \in \operatorname{rad}(A)$. Istnieje więc element $q_0 \in \operatorname{rad}(A)$ taki, że

$$x^2 - x + q_0 = 0. \tag{4.9}$$

Naszym zadaniem jest znalezienie takiego elementu $u \in \mathrm{rad}(A)$, iż spełniona jest równość $(x+u)^2 = x+u$, czyli $u^2 - u(e-2x) + x^2 - x = 0$. Po podstawieniu z równania (4.9) dostaniemy

$$u^2 - u(e-2x) - q_0 = 0 \tag{4.10}$$

Będziemy szukać u w specjalnej postaci, to znaczy $u = v(e-2x)$ dla pewnego $v \in \mathrm{rad}(A)$. Wstawiając takie u do równania (4.10) uzyskujemy

$$v^2(e-2x)^2 - v(e-2x)^2 - q_0 = 0. \tag{4.11}$$

Jednak $(e-2x)^2 = e + 4(x^2 - x) = e - 4q_0$, czyli jest to element odwracalny w A ($q_0 \in \mathrm{rad}(A)$). W ten sposób równanie (4.11) możemy zapisać w postaci

$$v^2 - v - q_0(e - 4q_0)^{-1} = 0.$$

Jak już wiemy ma ono rozwiązanie $v = q_1 \in \mathrm{rad}(A)$. Wystarczy określić teraz element $u = q_1(e-2x)$ i $y = x + u$ będzie szukanym idempotentem. □

Możemy już sformułować twierdzenie tytułowe tego podrozdziału.

Twierdzenie 4.4.4 (Szyłowa o idempotentach)**.** *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha oraz $C \subset \mathfrak{M}(A)$ zbiorem zwarto - otwartym. Wówczas istnieje idempotent $a \in A$ taki, że $\widehat{a} = \chi_C$.*

Dowód. W przypadku, gdy A ma jedynkę twierdzenie jest udowodnione w oparciu o poprzedzające stwierdzenie i lemat. Jeśli A nie ma jedynki, to rozważając A_e widzimy bez trudu, iż C pozostaje zbiorem otwarto - zwartym w $\mathfrak{M}(A_e)$, a więc istnieje idempotent $a \in A_e$ taki, że $\widehat{a}|_C = 1$ oraz $\widehat{a}|_{\mathfrak{M}(A_e)\setminus C} = 0$. Wynika stąd $\varphi_\infty(a) = 0$, czyli $a \in A$. □

Pokażemy teraz kilka zastosowań twierdzenia Szyłowa.

Twierdzenie 4.4.5. *Niech A będzie przemienną, zespoloną, półprostą algebrą Banacha. Jeśli $\mathfrak{M}(A)$ jest zwarte, to A ma jedynkę.*

Dowód. Skoro $\mathfrak{M}(A)$ jest zwarte, to z twierdzenia Szyłowa o idempotentach istnieje $e \in A$ takie, że $\widehat{e} = 1$ na $\mathfrak{M}(A)$. Dla dowolnego $x \in A$ oraz $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ mamy więc

$$(\widehat{xe - x})(\varphi) = \widehat{x}(\varphi)\widehat{e}(\varphi) - \widehat{x}(\varphi) = 0.$$

Półprostota A zapewnia teraz $xe - x = 0$, czyli e jest jedynką. □

Dzięki twierdzeniu Szyłowa o idempotentach możemy teraz zbadać dokładniej sytuację, gdy $\mathfrak{M}(A)$ jest całkowicie niespójne.

Twierdzenie 4.4.6. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha i załóżmy, że $\mathfrak{M}(A)$ jest całkowicie niespójne. Wówczas $\widehat{A} = \{\widehat{a} : a \in A\}$ jest gęste w $C_0(\mathfrak{M}(A))$.*

Dowód. Ustalmy $f \in C_0(\mathfrak{M}(A))$ i $\varepsilon > 0$. Ponieważ f znika w nieskończoności oraz każdy punkt $\mathfrak{M}(A)$ ma bazę złożoną ze zbiorów otwarto - zwartych, to istnieje zbiór zwarto - otwarty $K \subset \mathfrak{M}(A)$ taki, że

$$|f(\varphi)| < \varepsilon \text{ dla wszystkich } \varphi \in \mathfrak{M}(A) \setminus K.$$

Dalej, K możemy przedstawić jako sumę rozłączną zbiorów otwarto - zwartych $E_1, \ldots, E_r$ takich, że $|f(\varphi) - f(\psi)| < \varepsilon$ dla $\varphi, \psi \in E_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$, a więc istnieją $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$, dla których funkcja

$$g = \sum_{j=1}^{r} c_j \chi_{E_j} \text{ spełnia } |f(\varphi) - g(\varphi)| < \varepsilon \text{ dla } \varphi \in K.$$

Z twierdzenia Szyłowa o idempotentach istnieją $a_j \in A$, $1 \leqslant j \leqslant r$ takie, że $\widehat{a_j} = \chi_{E_j}$. Dla elementu

$$a = \sum_{j=1}^{r} c_j a_j \text{ mamy więc } ||\widehat{a} - f||_\infty < \varepsilon,$$

co kończy dowód. □

Nasze kolejne zastosowanie dotyczy rozkładu przemiennej algebry na sumę prostą ideałów.

Definicja 4.4.7. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką. Powiemy, że A rozkłada się na sumę prostą ideałów I_1, I_2, gdy istnieją ideały domknięte I_1, I_2 takie, że

$$A = I_1 \oplus I_2$$

mamy tu na myśli sumę prostą algebr, czyli mnożenie jest po współrzędnych.

Najpierw fakt ogólny.

Fakt 4.4.8. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką. A rozkłada się na sumę prostą pewnych ideałów I_1, I_2 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją idempotenty $e_1, e_2 \in A$ takie, że $e = e_1 + e_2$.*

Dowód. Załóżmy, że $A = I_1 \oplus I_2$ dla pewnych domkniętych ideałów I_1, I_2. Wówczas $e = e_1 + e_2$ dla $e_1 \in I_1$ oraz $e_2 \in I_2$. Ponadto

$$e_1 + e_2 = e = e^2 = e_1^2 + e_2^2 + 2e_1e_2.$$

$e_1e_2 \in I_1 \cap I_2$, a więc $e_1e_2 = 0$, czyli naszą równość możemy przepisać w postaci

$$e_1 - e_1^2 = e_2^2 - e_2.$$

Stąd $e_1 - e_1^2, e_2^2 - e_2 \in I_1 \cap I_2$, a więc e_1 i e_2 są idempotentami.
Jeśli e_1, e_2 są idempotentami takimi, że $e = e_1 + e_2$, to przyjmijmy $I_1 = e_1A$

oraz $I_2 = e_2 A$. Wówczas $A = I_1 + I_2$. Wykonując analogiczny rachunek jak poprzednio przekonujemy się, że $e_1 e_2 = 0$. Jeśli $x \in I_1 \cap I_2$, to

$$x = xe_1 = xe_2 = xe_1 e_2 = 0,$$

a więc $I_1 \cap I_2 = \{0\}$ i $A = I_1 \oplus I_2$. Domkniętość ideałów jest również niezwykle łatwa, gdyż mając ciąg $x_n \in I_1$ zbieżny w A do pewnego elementu x dostajemy

$$x_n = e_1 x_n \to e_1 x \in A.$$

□

Uwaga 4.4.9. Powyższy fakt jest prawdziwy dla dowolnej (skończonej) liczby składników prostych.

Dowód. Pierwszą implikację dowodzimy tak, jak poprzednio. W drugą stronę, niech $e_1, \ldots, e_n \in A$ będą idempotentami takimi, że

$$e = e_1 + \ldots + e_n.$$

Będziemy dowodzić naszą tezę przez indukcję, a więc załóżmy, iż zdanie jest wykazane dla n i wywnioskujmy jego prawdziwość dla $n+1$ (przypadek $n = 2$, czyli założenie indukcyjne jest zawarty w dowodzie faktu). Niech więc

$$e = e_1 + \ldots + e_n + e_{n+1}. \tag{4.12}$$

Przyjmijmy $I_{n+1} = e_{n+1} A$ oraz

$$J := \operatorname{ann}(I) = \{x \in A : xI = 0\}.$$

Weźmy dowolny $x \in A$. Wówczas $x = x - e_{n+1}x + e_{n+1}x$. Drugi składnik należy od I_{n+1}, a pierwszy do J, a więc $A = J + I_{n+1}$. Widać również, że $I \cap J = \{0\}$, gdyż w jeśli element $0 \neq y = ye_{n+1} \in I \cap J$, to $0 = ye_{n+1} = ye_{n+1}^2 = ye_{n+1} = y$. Zatem $A = J \oplus I_{n+1}$. Zauważmy również, iż $e_1 + \ldots + e_n \in J$, a ponadto dla $x \in J$ mamy

$$x = xe = x(e_1 + \ldots + e_n) + xe_{n+1} = x(e_1 + \ldots + e_n),$$

a więc element $e_1 + \ldots + e_n$ jest jedynką w podalgebrze J i możemy zastosować założenie indukcyjne. □

Twierdzenie 4.4.10. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebra Banacha z jedynką.*

1. *Jeśli $\mathfrak{M}(A)$ jest sumą rozłączną otwarto - domkniętych podzbiorów $F_1, \ldots, F_m$, to istnieją domknięte ideały $I_1, \ldots, I_m$ (każdy ma swoją prywatną jedynkę) takie, że*

$$A = I_1 \oplus \ldots \oplus I_m \text{ oraz } \mathfrak{M}(I_j) = F_j \text{ dla } j = 1, \ldots, m.$$

2. *Na odwrót, gdy A jest sumą prostą domkniętych ideałów $I_1, \ldots, I_m$, to zbiory $\mathfrak{M}(I_j)$ są otwarto - domknięte w $\mathfrak{M}(A)$ i $\mathfrak{M}(A)$ jest ich sumą rozłączną.*

Dowód. Dla uproszczenia notacji wykażemy to twierdzenie dla $m = 2$ (przypadek ogólny nie nastręcza dodatkowych trudności).
1. Z twierdzenia Szyłowa o idempotentach istnieje idempotent $e_1 \in A$ taki, że $\widehat{e_1} = \chi_{F_1}$. Połóżmy $e_2 = e - e_1$. Wówczas e_2 jest idempotentem i $\widehat{e_2} = \chi_{F_2}$. Przyjmijmy $I_j = e_j A$ dla $j = 1, 2$. Jak wykazaliśmy w fakcie poprzedzającym twierdzenie są to domknięte ideały o własności $A = I_1 \oplus I_2$. Poza tym, każdy funkcjonał liniowo - multiplikatywny na $\varphi \in \mathfrak{M}(I_1)$ podnosi się na $\widetilde{\varphi} \in \mathfrak{M}(A)$ poprzez położenie zera na I_2. W ten sposób, dla $j = 1, 2$

$$\mathfrak{M}(I_j) = \{\varphi \in \mathfrak{M}(A) : \varphi(x) \neq 0 \text{ dla pewnego } x \in I_j\} \tag{4.13}$$

Jeśli więc $\varphi \in F_j$, to $\varphi \in \mathfrak{M}(I_j)$, a w przeciwnym razie $\varphi \notin \mathfrak{M}(I_j)$, bo zeruje się na generatorze ideału I_j.
2. Jeśli $A = I_1 \oplus I_2$, to rozumując podobnie jak poprzednio (każdy funkcjonał na I_j się przedłuża) otrzymujemy $\mathfrak{M}(I_1) \cup \mathfrak{M}(I_2) \subset \mathfrak{M}(A)$. W tym miejscu musi być równość, gdyż w przeciwnym razie istniałby pewien funkcjonał liniowo - multiplikatywny zerujący się na obu składnikach sumy prostej. Ponadto, $\mathfrak{M}(I_1) \cap \mathfrak{M}(I_2) = \emptyset$, bo inaczej istniałoby $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ o własności $\varphi(e_1), \varphi(e_2) \neq 0$, a więc $\varphi(e_1 e_2) = \varphi(e_1)\varphi(e_2) \neq 0$, co jest niemożliwe ze względu na $e_1 e_2 = 0$. Otwartość (i domkniętość) $\mathfrak{M}(I_j)$ dla $j = 1, 2$ wynika teraz z opisu (4.13). □

Na koniec udowodnimy daleko idące wzmocnienie lematu, którego użyliśmy w dowodzie twierdzenia Szyłowa.

Twierdzenie 4.4.11. *Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha z jedynką oraz niech f będzie niezerową funkcją holomorficzną określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$. Załóżmy, że istnieje rozwiązanie $x \in A$ równania*

$$f(x) = q, \text{ gdzie } q \in \operatorname{rad}(A) \text{ i } \sigma(x) \subset U.$$

Wówczas istnieje $y \in A$ będące rozwiązaniem równania $f(y) = 0$ takie, że $x - y \in$ $\operatorname{rad}(A)$.

Dowód. Dla dowolnego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ mamy

$$\varphi(f(x)) = f(\varphi(x)) = \varphi(q) = 0,$$

a ponadto $\sigma(x) \subset U$, co dowodzi, iż do $\sigma(x)$ należy co najwyżej skończona liczba zer funkcji f. Wynika stąd, że dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ zachodzi $\varphi(x) = \lambda_i$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$, gdzie λ_i to parami różne zera funkcji f. Określmy teraz dla $i = 1, 2, \ldots, n$ zbiory F_i

$$F_i = \{\varphi \in \mathfrak{M}(A) : \widehat{x}(\varphi) = \lambda_i\}.$$

Z ciągłości transformaty Gelfanda elementu x wynika domkniętość zbiorów F_i. Są one oczywiście parami rozłączne, co prowadzi do rozkładu $\mathfrak{M}(A)$ na sumę rozłączną zbiorów otwarto - domkniętych

$$\mathfrak{M}(A) = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n.$$

Jak wykazaliśmy niedawno temu rozkładowi odpowiada przedstawienie algebry A jako sumy prostej domkniętych ideałów, co z kolei jest równoważne jednoznacznemu rozpisaniu $e = e_1 + \ldots + e_n$, gdzie e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ są idempotentami. Ponadto zachodzi równość

$$\varphi(e_i) = \delta_{ij} \text{ dla } \varphi \in F_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Określając element y wzorem

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

dostrzegamy bez trudu $y - x \in \mathrm{rad}(A)$. Przekonać się o $f(y) = 0$ można na dwa sposoby. Pierwszy z nich jest nieco siłowy.
Z ortogonalności idempotentów e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ wynika, że

$$y^m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m e_i \text{ dla każdego } m \in \mathbb{N}.$$

Stąd $y^m \in \mathrm{lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$ dla $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tak więc elementy $e, y, \ldots, y^n$ są liniowo zależne. Istnieje zatem wielomian P stopnia n o własności $P(y) = 0$. Z twierdzenia o odwzorowaniu spektralnym mamy

$$0 = \sigma(P(y)) = P(\sigma(y)),$$

co prowadzi do równości $P(\lambda_i) = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Innych zer wielomian P mieć nie może, bo ma stopień n, czyli jest postaci

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots (\lambda - \lambda_n).$$

Określmy wielomian Q za pomocą formuły interpolacyjnej Lagrange'a

$$Q(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\lambda_i)P(\lambda)}{P'(\lambda_i)(\lambda - \lambda_i)}.$$

Jest to wielomian stopnia mniejszego niż n spełniający $f(\lambda_i) = Q(\lambda_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Teraz funkcja $g := \frac{f-Q}{P}$ jest holomorficzna, co po wstawieniu elementu y prowadzi do wzoru

$$f(y) = g(y)P(y) + Q(y)$$

Jak już wiemy, $P(y) = 0$, a ponadto wielomian Q jako wielomian stopnia mniejszego niż n mający n zer jest wielomianem zerowym i w ten sposób $f(y) = 0$.

Oczywiście moglibyśmy pominąć rozważanie wielomianu Q w tym przypadku, ale tego typu podejście ma zastosowanie w wielu kontekstach (można w podobny sposób wykazać, że jeśli element x algebry Banacha spełnia $P(x)$ dla pewnego wielomianu P, to rachunek funkcyjny można uprawiać bez odwoływania się do wzoru Cauchy'ego).
Inaczej, niech $z \in A$ będzie dowolnym elementem takim, że $\sigma(z) \subset U$. Wówczas

$$f(ze_i) = e_i f(z) \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Istotnie, $ze_i \in I_i := e_i A$ oraz $\sigma_{I_i}(ze_i) \subset \sigma_A(z)$, a więc możemy na ze_i działać funkcją f, gdy potraktujemy ją jako element algebry I_i (z jedynką e_i!), co dowodzi naszego wzoru. Dla elementu y mamy jednak

$$ye_i = e_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \lambda_i e_i \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Traktując $\lambda_i e_i$ jako element I_i możemy zadziałać na nim funkcją f otrzymując (Γ to mały okrąg o środku w λ_i)

$$f(\lambda_i e_i) = \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e_i - \lambda_i e_i)^{-1} d\lambda = e_i f(\lambda_i) = 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zatem

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} e_i f(y) = \sum_{i=1}^{n} f(ye_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i e_i) = 0.$$

$\square$

Rozdział 5

Algebry regularne i synteza spektralna

5.1 Topologia otoczki i jądra

Wprowadzimy teraz dwie operacje na zbiorach, które są zapewne niektórym znane z kursów algebry.

Definicja 5.1.1. Niech A będzie zespoloną, przemienną algebrą Banacha. Dla $E \subset \mathfrak{M}(A) = \mathrm{Max}(A)$, $E \neq \emptyset$ wprowadzamy *jądro* E (*kernel*) jako podzbiór A zdefifniowany następująco

$$k(E) = \{x \in A : \underset{\varphi \in E}{\forall} \varphi(x) = 0\} = \bigcap \{M \in \mathrm{Max}(A) : M \in E\}.$$

Widzimy, że jest to domknięty ideał w A. Przyjmujemy ponadto $k(\emptyset) = A$ oraz dla $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ piszemy $k(\varphi)$ zamiast $k(\{\varphi\})$.
Dla $B \subset A$ określamy *otoczkę* zbioru B jako podzbiór $\mathfrak{M}(A)$ jak następuje

$$h(B) = \{\varphi \in \mathfrak{M}(A) : B \subset k(\varphi)\} = \{M \in \mathrm{Max}(A) : B \subset M\}.$$

Z ciągłości transformat Gelfanda wynika, że jest to domknięty podzbiór $\mathfrak{M}(A)$.

Podstawowe własności tych operacji opisuje najbliższy lemat.

Lemat 5.1.2. *Niech B, B_1 i $B_2 \subset A$ oraz E, E_1 i $E_2 \subset \mathfrak{M}(A)$. Wówczas*

1. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow h(B_1) \supset h(B_2)$.
2. $h(\overline{B}) = h(B)$ *i* $\overline{B} \subset k(h(B))$.
3. $h(B) = h(k(h(B)))$.
4. $E_1 \subset E_2 \Rightarrow k(E_1) \supset k(E_2)$.

5. $E \subset h(k(E))$ *i* $k(E) = k(h(k(E)))$.

6. $h(k(E_1 \cup E_2)) = h(k(E_1)) \cup h(k(E_2))$.

Dowód. Punkty 1., 2. oraz 4. wynikają wprost z definicji.
Dowodzimy punkt 3. Jeśli $M \in h(k(h(B)))$, to z drugiej części punktu 2. mamy $B \subset k(h(B)) \subset M$, a więc $M \in h(B)$. Jeśli zaś $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ spełnia $k(\varphi) \notin h(k(h(B)))$, to $\varphi(a) \neq 0$ dla pewnego $a \in k(h(B))$, a więc $\varphi \notin h(B)$.
Pierwsza część punktu 5. wynika wprost z definicji. Korzystając z punktu 4. uzyskujemy inkluzję

$$k(E) \supset k(h(k(E))).$$

Wstawiając $B = k(E)$ do drugiej części punktu 2. otrzymamy drugie zawieranie.
Aby udowodnić punkt 6. zauważmy, że

$$h(k(E_1)) \cup h(k(E_2)) \subset h(k(E_1) \cap k(E_2)) = h(k(E_1 \cup E_2)).$$

Weźmy

$$\varphi \in h(k(E_1 \cup E_2)) = h(k(E_1) \cap k(E_2)) \subset h(k(E_1) \cdot k(E_2)).$$

Ostatnia inkluzja wynika stąd, że jądro każdego zbioru jest ideałem, a dla takowych zachodzi $IJ \subset I \cap J$. Załóżmy teraz, że $\varphi \notin h(k(E_2))$ i weźmy $a \in k(E_2)$ spełniające $\varphi(a) \neq 0$. Wówczas dla wszystkich $x \in k(E_1)$ mamy $\varphi(x)\varphi(a) = \varphi(xa) = 0$, a stąd $\varphi \in h(k(E_1))$. □

Definicja 5.1.3. Określmy operację $\mathcal{F} : P(\mathfrak{M}(A)) \mapsto P(\mathfrak{M}(A))$, $\mathcal{F}(E) = \overline{E}$ dla $E \subset \mathfrak{M}(A)$ za pomocą wzoru $\overline{E} = h(k(E))$.

Z poprzedniego lematu możemy uzasadnić ważne własności tej operacji.

Fakt 5.1.4. *Odwzorowanie $\mathcal{F}$ jest operacją domknięcia.*

Dowód. Musimy udowodnić następujące wzory dla podzbiorów $\mathfrak{M}(A)$

1. $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$
2. $E \subset \overline{E}$
3. $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$

Punkt 1. to dokładnie punkt 6. poprzedniego lematu. Teraz, korzystając z punktu 5. wymienionego lematu mamy $E \subset h(k(E)) = \overline{E}$. Dla dowodu ostatniego punktu używamy drugiej części punktu 5.

$$\overline{\overline{E}} = h(k(h(k(E)))) = h(k(E)) = \overline{E}.$$

□

Możemy już wprowadzić główną definicję tego podrozdziału.

Definicja 5.1.5. *Topologią otoczki i jądra* (*hull-kernel topology*) nazywamy topologię na $\mathfrak{M}(A)$ zadaną przez operację domknięcia $\mathcal{F} : P(\mathfrak{M}(A)) \mapsto P(\mathfrak{M}(A))$

$$\mathcal{F}(E) = \overline{E} = h(k(E)) \text{ dla } E \subset \mathfrak{M}(A).$$

Tę topologię będziemy w skrócie nazywać hk-topologią.

Wprost z domknietości otoczek wynika następująca uwaga.

Uwaga 5.1.6. hk-topologia na $\mathfrak{M}(A)$ jest słabsza niż topologia Gelfanda.

Wniosek 5.1.7. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha z jedynką. Wówczas $\mathfrak{M}(A)$ jest quasi-zwarta w hk-topologii (to znaczy, że z każdego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie skończone, ale niekoniecznie jest to przestrzeń Hausdorffa).*

Dowód. A ma jedynkę, więc jak dobrze pamiętamy $\mathfrak{M}(A)$ jest przestrzenią zwartą. Biorąc teraz dowolne pokrycie otwarte w hk-topologii widzimy, że jest to także pokrycie otwarte w topologii Gelfanda (hk-topologia jest słabsza), więc można z niego wybrać podpokrycie skończone. □

Wprost z definicji ideału maksymalnego modularnego wynika jeszcze jedna prosta uwaga.

Uwaga 5.1.8. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha. Wówczas $\mathfrak{M}(A)$ jest przestrzenią T_1 (punkty są domknięte) w hk-topologii.

Następny lemat pokaże, że nasza nowa topologia zachowuje się dobrze przy typowych operacjach.

Lemat 5.1.9. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha, a $I \subset A$ ideałem domkniętym. Oznaczmy przez $q : A \mapsto A/I$ odwzorowanie ilorazowe.*

1. *Odwzorownie $\phi : \varphi \mapsto \varphi \circ q$ jest homeomorfizmem w hk-topologiach pomiędzy $\mathfrak{M}(A/I)$ i domkniętym podzbiorem $h(I) \subset \mathfrak{M}(A)$.*

2. *Odwzorowanie $\varphi \mapsto \varphi_I$ (obcięcie do I) jest homeomorfizmem w hk-topologiach pomiędzy otwartym podzbiorem $\mathfrak{M}(A) \setminus h(I) \subset \mathfrak{M}(A)$ oraz $\mathfrak{M}(I)$.*

Dowód. 1. Niech $E \subset \mathfrak{M}(A/I)$ i $\varphi \in \mathfrak{M}(A/I)$. Wówczas

$$\ker(\phi(\varphi)) = [\phi(\varphi)]^{-1}(\{0\}) = (\varphi \circ q)^{-1}(\{0\}) = q^{-1}(\varphi^{-1}(\{0\})) = q^{-1}(\ker\varphi).$$

Wykażemy teraz następującą równoważność

$$\ker\varphi \supset \bigcap\{\ker\psi : \psi \in E\} = k(E) \Leftrightarrow \ker\phi(\varphi) \supset \bigcap\{\ker\tau : \tau \in \phi(E)\} = k(\phi(E)).$$

Istotnie,

$$\ker\varphi \supset \bigcap\{\ker\psi : \psi \in E\} \Leftrightarrow \text{ (jedna implikacja wymaga chwili refleksji)}$$
$$\ker\phi(\varphi) = q^{-1}(\ker\varphi) \supset q^{-1}\left(\bigcap\{\ker\psi : \psi \in E\}\right) =$$
$$\bigcap\{q^{-1}(\ker\psi) : \psi \in E\} = \bigcap\{\ker\phi(\psi) : \psi \in E\} =$$
$$\bigcap\{\ker\tau : \tau \in \phi(E)\}.$$

Korzystając z definicji otoczki, zauważamy, iż wykazaliśmy równoważność

$$\varphi \in h(k(E)) \Leftrightarrow \phi(\varphi) \in h(k(\phi(E))),$$

która uzasadnia, że E jest hk-domknięty wtedy i tylko wtedy $\phi(E)$ jest hk-domknięty.
2. Sprawdzamy łatwo, że odwzorowanie $\varphi \mapsto \varphi_I$ jest dobrze określone i różnowartościowe. Nieco trudniej jest uzasadnić jego surjektywność, która sprowadza się do wykazania, iż każdy funkcjonał z $\varphi \in \mathfrak{M}(I)$ można podnieść do funkcjonału $\widetilde{\varphi} \in \mathfrak{M}(A)$. Szkicowe rozwiązanie wygląda następująco (szczegóły pozostawiamy do samodzielnego namysłu): istnieje $x_0 \in I$ o własności $\varphi(x_0) = 1$. Kładziemy $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(xx_0)$ dla $x \in A$.
Wiedząc już, że odwzorowanie obcięcia jest bijekcją znów będziemy dowodzić równoważność dla dowolnego podzbioru $E \subset \mathfrak{M}(A) \setminus h(I)$ oraz $\varphi \in \mathfrak{M}(A) \setminus h(I)$

$$\ker\varphi \supset \bigcap(\{\ker\psi : \psi \in E\}) \Leftrightarrow$$
$$\ker(\varphi_I) = \ker\varphi \cap I \supset \bigcap(\{\ker\psi : \psi \in E\}) \cap I =$$
$$\bigcap(\{\ker\psi \cap I : \psi \in E\}) = \bigcap(\{\ker(\psi_E) : \psi \in E\})\,.$$

Tym razem implikacja z dołu do góry nie jest oczywista. Weźmy więc $x \in \bigcap(\{\ker\psi : \psi \in E\})$. Wówczas dla każdego $y \in I$ mamy

$$xy \in \bigcap(\{\ker\psi : \psi \in E\}) \cap I \subset \ker\varphi \cap I,$$

czyli $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = 0$ dla każdego $y \in I$. Tymczasem $\varphi(y) = \varphi_I(y)$, a więc dla pewnego $y \in I$ mamy $\varphi(y) \neq 0$, co daje $\varphi(x) = 0$ i kończy dowód. □

Na koniec tego podrozdziału podamy jeszcze dwa lematy techniczne, których użyjemy później.

Lemat 5.1.10. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha bez jedynki i niech $a \in A$ będzie takie, że $\widehat{a}$ jest ciągłe w hk-topologii. Wówczas $\widehat{a}$ jest także ciągłe w hk-topologii na $\mathfrak{M}(A_e)$.*

Dowód. Przez h oraz k będziemy oznaczać otoczkę i jądro w odniesieniu do A, zaś przez h_e, k_e będziemy oznaczać te same operacje w odniesieniu do $\mathfrak{M}(A_e)$. Niech $E \subset \mathfrak{M}(A_e)$. Zachodzi zawieranie

$$h_e(k_e(E)) \subset h(k(E \cap \mathfrak{M}(A))) \cup \{\varphi_\infty\}.$$

Istotnie, z zawierania $E \subset (E \cap \mathfrak{M}(A)) \cup \{\varphi_\infty\}$ wynika

$$k_e(E) \supset k_e((E \cap \mathfrak{M}(A)) \cup \{\varphi_\infty\}).$$

Dalej,

$$k_e((E \cap \mathfrak{M}(A)) \cup \{\varphi_\infty\}) = k_e((E \cap \mathfrak{M}(A)) \cap k_e(\varphi_\infty) =$$
$$k_e(E \cap \mathfrak{M}(A)) \cap A = k(E \cap \mathfrak{M}(A)).$$

Przykładając teraz h_e do obu stron zawierania $k_e(E) \supset k(E \cap \mathfrak{M}(A))$ dostajemy

$$h_e(k_e(E)) \subset h_e(k(E \cap \mathfrak{M}(A))) = h(k(E \cap \mathfrak{M}(A))) \cup \{\varphi_\infty\}.$$

Niech F będzie niepustym zbiorem domkniętym w płaszczyźnie zespolonej i niech $E = \{\varphi \in \mathfrak{M}(A_e) : \varphi(a) \in F\}$. Z założenia o a zbiór $E \cap \mathfrak{M}(A)$ jest hk-domknięty w $\mathfrak{M}(A)$. Mamy wykazać, że E jest hk-domknięty w $\mathfrak{M}(A_e)$. Rozróżnimy dwa przypadki.
Załóżmy, że $0 \in F$. Wówczas $\varphi_\infty \in E$ i udowodnione wcześniej zawieranie implikuje

$$h_e(k_e(E)) \subset (E \cap \mathfrak{M}(A)) \cup \{\varphi_\infty\} = E,$$

co kończy uzasadnienie w tym przypadku.
Jeśli $0 \notin F$, to $\varphi_\infty \notin E$, a więc $E \subset \mathfrak{M}(A)$. Niech $\delta = \inf\{|\alpha| : \alpha \in F\}$. Wówczas $\delta > 0$ i $|\varphi(a)| \geqslant \delta$ dla wszystkich $\varphi \in E$. Teraz, z domkniętości E oraz faktu $\widehat{a} \in C_0(\mathfrak{M}(A))$ wynika, że E jest zwarty. Z poprzedniego lematu wiemy, iż $E = \mathfrak{M}(A/k(E))$. Oznacza to zwartość przestrzeni ideałów maksymalnych modularnych algebry $A/k(E)$. Bez trudu widzimy również, że jest to algebra półprosta (podzieliliśmy algebrę A przez ideał zawierający te elementy, na ktorych zerują się wszystkie funkcjonały liniowo - multiplikatywne działające na algebrze ilorazowej). Z twierdzenia 4.4.5 wynika, że ta algebra ma jedynkę. Stosując rachunek funkcyjny do elementu a możemy zadziałać funkcją określoną na otoczeniu spektrum jako $f(z) = \frac{1}{z}$ otrzymując element $b \in A$ czyniący zadość równości

$$\varphi(b) = \frac{1}{\varphi(a)} \text{ dla } \varphi \in E.$$

Teraz, określmy element $x \in A_e$ jako

$$x = e - ab.$$

Wówczas x spełnia $\varphi_\infty(x) = 1$ oraz $\varphi(x) = 0$ dla wszystkich $\varphi \in E$. Stąd $\varphi_\infty \notin h_e(k_e(E))$, a więc

$$h_e(k_e(E)) \subset h(k(E \cap \mathfrak{M}(A))) = h(k(E)) = E.$$

Należy zwrócić uwagę, że wykonaliśmy pewne nadużycie, gdyż tak naprawdę stosowaliśmy rachunek funkcyjny w algebrze $A/k(E)$, a więc tam też znajdzie się element b. Nie jest to jednak duży kłopot ze względu na to, iż możemy równie dobrze traktować E jako podzbiór $\mathfrak{M}(A)$ (korzystając z poprzedniego lematu). $\square$

Lemat 5.1.11. *Niech I będzie ideałem domkniętym w przemiennej, zespolonej algebrze Banacha A i niech E będzie hk-domkniętym podzbiorem $\mathfrak{M}(A)$ takim, że $E \cap h(I) = \emptyset$ i $k(E)$ jest ideałem modularnym. Wówczas I zawiera jedynkę modulo $k(E)$.*

Dowód. $k(E) \subset I + k(E)$, a więc ten drugi ideał też jest modularny.

$$h(I + k(E)) = h(I) \cap h(k(E)) = h(I) \cap E = \emptyset.$$

Zatem $A = I + k(E)$ (inaczej istniałby ideał maksymalny modularny zawierający $I + k(E)$). Niech $u \in A$ spełnia $ux - x \in k(E)$ dla każdego $x \in A$ (jest to jedynka modulo $k(E)$). Teraz $u = v + y$, gdzie $v \in I$ oraz $y \in k(E)$, a więc

$$vx - x = ux - x - yx \in k(E) \text{ dla wszystkich } x \in A.$$

Zatem v jest jedynką modulo $k(E)$. □

5.2 Algebry regularne

Definicja 5.2.1. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha. Powiemy, że jest to algebra regularna, jeśli dla każdego domkniętego $E \subset \mathfrak{M}(A)$ i $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(A) \setminus E$ istnieje $x \in A$ takie, że $\varphi_0(x) \neq 0$ oraz $\varphi(x) = 0$ dla $\varphi \in E$.

Można wykazać, że $L^1(G)$ dla dowolnej lokalnie zwartej grupy abelowej jest algebrą regularną, lecz nie jest to łatwe. Omówimy krótko dwa inne przykłady.

Przykład 5.2.2.

1. Każda przemienna C^* - algebra jest regularna. Wynika to z twierdzenia Gelfanda - Najmarka oraz lematu Urysohna.
2. Algebra $A(\mathbb{D})$ nie jest regularna, gdyż nie istnieje niezerowa funkcja holomorficzna zerująca się na domkniętym zbiorze nieprzeliczalnym zawartym we wnętrzu $\mathbb{D}$.

Najbliższe twierdzenie wyjaśni, dlaczego algebry regularne stanowią klasę, ktorą warto się zajmować.

Twierdzenie 5.2.3. *Dla przemiennej, zespolonej algebry Banacha A następujące warunki są równoważne.*

1. *A jest regularna.*
2. *hk-topologia i topologia Gelfanda na $\mathfrak{M}(A)$ są identyczne.*
3. *hk-topologia na $\mathfrak{M}(A)$ jest Hausdorffa i każdy punkt z $\mathfrak{M}(A)$ ma hk-otoczenie z jądrem modularnym.*

Dowód. 1. $\Rightarrow$ 2. Załóżmy, że A jest regularna i weźmy zbiór $E \subset \mathfrak{M}(A)$ domknięty w topologii Gelfanda. Wówczas dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(A) \setminus E$ istnieje $x_\varphi \in A$ taki, że $\widehat{x_\varphi}|_E = 0$ oraz $\widehat{x_\varphi}(\varphi) \neq 0$. Znaczy to, iż $k(E) \nsubseteq \ker\varphi$ dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(A) \setminus E$, a więc $E = h(k(E))$, co kończy dowód tej implikacji.
2. $\Rightarrow$ 3. Wystarczy pokazać, że każde $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(A)$ ma otoczenie z jądrem $k(V)$ modularnym. Ustalmy $x \in A$ o własności $\varphi_0(x) \neq 0$ i niech

$$V = \left\{ \varphi \in \mathfrak{M}(A) : |\varphi(x)| > \frac{1}{2} |\varphi_0(x)| \right\}$$

Jest to otwarte otoczenie φ_0, którego domknięcie $\overline{V}$ jest zawarte w zbiorze

$$\left\{ \varphi \in \mathfrak{M}(A) : |\varphi(x)| \geqslant \frac{1}{2} |\varphi_0(x)| \right\}.$$

$\widehat{x} \in C_0(\mathfrak{M}(A))$, a więc $\overline{V}$ jest zwarte. Teraz, z założenia i poprzednich wyników, mamy $\overline{V} = h(k(V)) = \mathfrak{M}(A/k(V))$. Zatem algebra $A/k(V)$ jest półprostą algebrą Banacha o zwartej przestrzeni ideałów maksymalnych. W oparciu o twierdzenie 4.4.5 wnosimy, iż jest to algebra z jedynką, czyli $k(V)$ jest ideałem modularnym.
3. $\Rightarrow$ 1. Niech $E \subset \mathfrak{M}(A)$ będzie zbiorem domkniętym w topologii Gelfanda oraz $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(A) \setminus E$. Wybierzmy otwarte hk-otoczenie V funkcjonału φ_0 o jądrze modularnym, czyli $A/k(V)$ ma jedynkę. Stąd $h(k(V)) = \mathfrak{M}(A/k(V))$ jest zwarte w topologii Gelfanda, a więc to samo dotyczy także zbioru $E_0 = E \cap h(k(V))$. Wynika stąd również, że E_0 jest hk-zwarte. Dalej, $\varphi_0 \notin E_0$ i hk-topologia jest Hausdorffa z założenia. Standardowy argument pokryciowy pokazuje, że φ_0 można od E_0 oddzielić zbiorem hk-otwartym. Niech więc U będzie hk-otwartym zawierającym E_0 takim, że $\varphi_0 \notin \overline{U} = h(k(U))$. Wówczas istnieje $y \in A$ o własności $\varphi_0(y) \neq 0$, ale $\varphi(y) = 0$ dla $\varphi \in \overline{U}$. Z drugiej strony, $\varphi_0 \in V$ i $\mathfrak{M}(A) \setminus V$ jest hk-domknięte. Zatem istnieje $z \in k(\mathfrak{M}(A) \setminus V)$ spełniające $\varphi_0(z) \neq 0$. Niech $x = yz$. Wówczas $\varphi_0(x) = \varphi_0(y)\varphi_0(z) \neq 0$ oraz $\varphi(x) = 0$ dla $\varphi \in (\mathfrak{M}(A) \setminus V) \cup \overline{U}$. Ostatecznie,

$$(\mathfrak{M}(A) \setminus V) \cup \overline{U} \supset [\mathfrak{M}(A) \setminus h(k(V))] \cup [E \cap h(k(V))] \supset E.$$

$\square$

Pamiętając, że topologia Gelfanda jest najsłabszą topologią, w której transformaty Gelfanda wszystkich elementów są ciągłe otrzymujemy poniższy wniosek.

Wniosek 5.2.4. *Przemienna, zespolona algebra Banacha A jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy $\widehat{x}$ jest ciągłe w hk-topologii dla każdego $x \in A$.*

Następne stwierdzenie pokaże, że klasa algebr regularnych jest zamknięta na branie ideałów, algebr ilorazowych oraz dołączanie jedynki.

Stwierdzenie 5.2.5. *Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha. Wówczas*

1. *Jeśli I jest domkniętym ideałem w A i A jest regularna, to I oraz A/I są regularne.*

2. *A jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy A_e jest regularna.*

Dowód. 1. Skoro A jest regularna, to hk-topologia zgadza się z topologią Gelfanda (Twierdzenie 5.2.3). Z Lematu 5.1.9 odwzorowanie $\varphi \mapsto \varphi_I$ jest homeomorfizmem w hk-topologiach pomiędzy $\mathfrak{M}(A) \setminus h(I)$ oraz $\mathfrak{M}(I)$. To samo jest prawdą dla topologii Gelfanda, więc na $\mathfrak{M}(I)$ obie topologie się pokrywają i wystarczy znów zastosować wymienione wcześniej twierdzenie. Drugą część punktu 1. dowodzimy analogicznie.
2. Jeśli A_e jest regularna, to A jest regularna na mocy części 1., bo jest domkniętym ideałem w A_e. Gdy A jest regularna, to z wniosku poprzedzającego stwierdzenie wiemy, iż $\widehat{x}$ jest ciągłe w hk-topologii dla każdego $x \in A$, co w

oparciu o Lemat 5.1.10 implikuje, że każde $\widehat{x}$ jest ciągłe na A_e w hk-topologii i wystarczy znów zastosować wniosek. $\square$

W dalszej części naszych rozważań przyda nam się jeszcze jeden lemat.

Lemat 5.2.6. *Niech I będzie ideałem w przemiennej, zespolonej, regularnej algebrze Banacha A. Wówczas dla każdego $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(A) \setminus h(I)$ istnieje $u \in I$ takie, że $\widehat{u} = 1$ na pewnym otoczeniu φ_0.*

Dowód. Skoro A jest regularna, to φ_0 ma otoczenie V z jądrem modularnym. Przestrzeń $\mathfrak{M}(A)$ jest lokalnie zwarta, a więc spełnia aksjomat oddzielania T_3, czyli możemy znaleźć zbiory otwarte $U, S \subset \mathfrak{M}(A)$ takie, że $\varphi_0 \in U$, $h(I) \subset S$ oraz $U \cap S = \emptyset$. Stąd $\overline{U} \cap S = \emptyset$ i w szczególności $\overline{U} \cap h(I) = \emptyset$. Zachodzi oczywista inkluzja $U \cap V \subset V$, która pociąga za sobą $k(V) \subset k(U \cap V)$. Zatem ideał $k(U \cap V)$ jest również modularny i jak łatwo sprawdzić $k(U \cap V) = k(\overline{U \cap V})$. Korzystając teraz z Lematu 5.1.11 ideał I zawiera element u, który jest jedynką modulo $k(\overline{U \cap V})$. Wynika stąd łatwo $\widehat{u} = 1$ na $U \cap V$. $\square$

Przechodzimy do ważnego twierdzenia, z którego wyciągniemy potem niezwykle użyteczne wnioski.

Twierdzenie 5.2.7. *Niech A będzie przemienną, zespoloną, regularną algebrą Banacha, I ideałem w A oraz $K \subset \mathfrak{M}(A)$ zbiorem zwartym spełniającym $K \cap h(I) = \emptyset$. Wówczas istnieje $x \in I$ takie, że $\widehat{x}|_K = 1$ i $\widehat{x} = 0$ w pewnym otoczeniu $h(I)$.*

Dowód. Wykażemy najpierw istnienie $y \in I$ o własności $\widehat{y}_K = 1$. Skoro K jest zwarte, to na mocy poprzedniego lematu istnieją zbiory otwarte $V_i \subset \mathfrak{M}(A)$ i elementy $u_i \in I$, $1 \leqslant i \leqslant r$ takie, że $\widehat{u_i}|_{V_i} = 1$ i $K \subset \bigcup_{i=1}^{r} V_i$. Definiujemy teraz indukcyjnie ciąg elementów $y_i \in A$ poprzez $y_1 = u_1$ oraz

$$y_{i+1} = y_i + u_{i+1} - y_i u_{i+1} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant r-1.$$

Sprawdzamy łatwo, że $y_i \in I$. Uzasadnimy teraz własność

$$\widehat{y_j}|_{\bigcup_{i=1}^{j}} V_i = 1.$$

Jest to prawda dla $j = 1$, więc załóżmy prawdziwość tezy dla j i wywnioskujmy dla $j+1$. Niech $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$. Wówczas

$$\varphi(y_{j+1}) = \varphi(y_j) + \varphi(u_{j+1}) - \varphi(y_j)\varphi(u_{j+1}) =$$
$$\begin{cases} 1 + \varphi(u_{j+1}) - \varphi(u_{j+1}) \text{ dla } \varphi \in \bigcup_{i=1}^{j} V_i \\ 1 \text{ dla } \varphi \in V_{j+1} \end{cases}$$

Zatem $\widehat{y_{j+1}} = 1$ na $\bigcup_{i=1}^{j+1} V_i$. Kładąc $y = y_r$ otrzymujemy żądany element.
Uzasadnimy teraz, że istnieje zbiór otwarty $V \subset \mathfrak{M}(A)$ o własnościach $K \subset V$, $\overline{V} \subset \mathfrak{M}(A) \setminus h(I)$. Skoro $K \cap h(I) = \emptyset$, to dla każdego $\varphi \in K$ istnieje otoczenie $\varphi \in S$ oraz otoczenie $h(I) \subset T$ spełniające $S \cap T = \emptyset$. Ze zwartości K możemy

wziąć tylko skończenie wiele otoczeń, których sumę nazywamy V. Przecinając otoczenia zbioru $h(I)$, które odpowiadają wybranym przez nas otoczeniom punktów z K uzyskujemy zbiór otwarty $L \supset h(I)$. W ten sposób gwarantujemy sobie inkluzję $\overline{V} \subset \mathfrak{M}(A) \setminus h(I)$. Kontynuując,

$$K \cap h(k(\mathfrak{M}(A) \setminus V)) = K \cap (\mathfrak{M}(A) \setminus V) = \emptyset,$$

a więc możemy zastosować pierwszą część dowodu dla K oraz ideału $J = k(\mathfrak{M}(A) \setminus V)$. Dzięki temu uzyskujemy element $z \in J$ spełniający $\widehat{z}|_K = 1$. Przyjmijmy $x = yz \in I$. Wówczas $\varphi(x) = 1$ dla każdego $\varphi \in K$ oraz

$$\mathrm{supp}\widehat{x} \subset \mathrm{supp}\widehat{z} \subset \overline{V} \subset \mathfrak{M}(A) \setminus h(I).$$

Zatem $\widehat{x}|_{\mathfrak{M}(A)\setminus\overline{V}} = 0$ i $h(I) \subset \mathfrak{M}(A) \setminus \overline{V}$, co kończy dowód. □

Czas na wnioski.

Wniosek 5.2.8. *Każda przemienna, zespolona, regularna algebra Banacha jest normalna, to znaczy dla każdego zbioru domkniętego $E \subset \mathfrak{M}(A)$ oraz zwartego $K \subset \mathfrak{M}(A)$, $E \cap K = \emptyset$ istnieje $x \in A$ o własnościach* $\mathrm{supp}\widehat{x} \subset \mathfrak{M}(A) \setminus E$, $\widehat{x}|_K = 1$.

Wniosek 5.2.9. *Niech A będzie zespoloną, przemienną, regularną algebrą Banacha taką, że obraz transformacji Gelfanda jest zamknięty na sprzężenie zespolone. Załóżmy, że K i E są rozłącznymi podzbiorami domkniętymi w $\mathfrak{M}(A)$ i że K jest zwarty. Wówczas istnieje $x \in A$ o własnościach $\widehat{x}|_K = 1$, $0 \leqslant \widehat{x} \leqslant 1$ oraz* $\mathrm{supp}\widehat{x} \subset \mathfrak{M}(A) \setminus E$.

Dowód. Wiemy już, że istnieje $y \in A$ spełniające $\widehat{y}|_K = 1$ i $\mathrm{supp}\widehat{y} \subset \mathfrak{M}(A) \setminus E$. Dzięki założeniu możemy znaleźć element $z \in A$ czyniący zadość równości $\widehat{z} = \overline{\widehat{y}}$. Niech $f(w) = \sin^2(\frac{\pi}{2}w)$. Jest to funkcja całkowita, więc możemy określić $x \in A$ kładać $x = f(yz)$. Teraz

$$\widehat{x}(\varphi) = \varphi(f(yz)) = f(\varphi(y)\varphi(z)) = \sin^2(\frac{\pi}{2}|\varphi(y)|^2).$$

Nietrudno sprawdzić, że taki element spełnia tezę. □

Kolejny wniosek mówi o istnieniu jedynki, ale dla jego dowodu nie potrzeba twierdzenia Szyłowa o idempotentach.

Wniosek 5.2.10. *Niech A będzie przemienną, półprostą, zespoloną, regularną algebrą Banacha. Jeśli $\mathfrak{M}(A)$ jest zwarte, to A ma jedynkę.*

Dowód. Dowód nie przedstawia żadnych trudności - dowiedzione wcześniej fakty uzasadniają istnienie $e \in A$ o własności $\widehat{e} = 1$, a półprostota zapewnia, że jest to jedynka. □

Następny wniosek to bardzo ważne twierdzenie o rozkładzie jedności, którego będziemy używać w dalszej części wykładu.

Wniosek 5.2.11. *Niech A będzie przemienną, zespoloną, regularną algebrą Banacha. Załóżmy, że $K \subset \mathfrak{M}(A)$ jest zwarte, zaś $U_1, \ldots, U_n$ są otwartymi podzbiorami $\mathfrak{M}(A)$ spełniającymi $K \subset \bigcup_{j=1}^n U_j$. Wówczas istnieją elementy $a_1, \ldots, a_n \in A$ o następujących własnościach:*

1. $(\widehat{a_1} + \ldots + \widehat{a_n})\,|_K = 1$
2. $\widehat{a_j}|_{\mathfrak{M}(A)\setminus U_j} = 0$ *dla* $j = 1, \ldots, n$.

Dowód. Określmy ideały $I_j = k(\mathfrak{M}(A) \setminus U_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Wówczas $h(I_j) = \mathfrak{M}(A) \setminus U_j$. Przyjmijmy $I = I_1 + \ldots + I_n$ i zauważmy, że

$$h(I) = \bigcap_{j=1}^n h(I_j) = \bigcap_{j=1}^n (\mathfrak{M}(A) \setminus U_j) = \mathfrak{M}(A) \setminus \bigcup_{j=1}^n U_j.$$

Stąd $h(I) \cap K = \emptyset$, czyli istnieje $a \in I$ spełniające $\widehat{a}|_K = 1$. Możemy napisać $a = a_1 + \ldots + a_n$, gdzie $a_j \in I_j = k(\mathfrak{M}(A) \setminus U_j)$, co kończy dowód. $\square$

Omówimy teraz zagadnienie *lokalnej przynależności funkcji do algebry*

Definicja 5.2.12. Niech A będzie przemienną, zespoloną algebrą Banacha i niech $M \subset A$ oraz $f : \mathfrak{M}(A) \mapsto \mathbb{C}$. Powiemy, że f należy lokalnie do M w punkcie $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$, gdy istnieje $x \in M$ oraz otoczenie V punktu φ takie, że $\widehat{x}(\psi) = f(\psi)$ dla $\psi \in V$. Analogicznie, f należy lokalnie do M w nieskończoności, jeśli istnieje $y \in M$ oraz zbiór zwarty $C \subset \mathfrak{M}(A)$ takie, że $\widehat{y}(\psi) = f(\psi)$ dla $\psi \in \mathfrak{M}(A) \setminus C$. Powiemy, że f należy lokalnie do M, gdy f należy lokalnie do M dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ i w nieskończoności.

Udowodnimy teraz twierdzenie, z którego wynika w szczególności, że dla algebry regularnej funkcja, która jest lokalnie transformatą Gelfanda jest tak naprawdę transformatą Gelfanda pewnego elementu.

Twierdzenie 5.2.13. *Niech A będzie przemienną, zespoloną, regularną algebrą Banacha i niech I będzie ideałem w A. Załóżmy, że $f : \mathfrak{M}(A) \mapsto \mathbb{C}$ należy lokalnie do I. Wówczas istnieje $x \in I$ o własności $\widehat{x} = f$. W szczególności, jeśli A jest półprosta i $y \in A$ jest takie, że $\widehat{y}$ należy lokalnie do I, to $y \in I$.*

Dowód. Skoro f należy lokalnie do I w nieskończoności, to istnieje zbiór zwarty $C \subset \mathfrak{M}(A)$ i element $x_0 \in I$ czyniący zadość równości $\widehat{x_0}(\psi) = f(\psi)$ dla $\psi \in \mathfrak{M}(A) \setminus C$. f należy również lokalnie do I w każdym punkcie C, więc istnieją zbiory otwarte $U_1, \ldots, U_n \subset \mathfrak{M}(A)$ i elementy $x_1, \ldots, x_n \in I$ o własności $C \subset \bigcup_{j=1}^n U_j$, $\widehat{x_j}(\varphi) = f(\varphi)$ dla $\varphi \in U_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Algebra A jest regularna, czyli możemy skorzystać z twierdzenie o rozkładzie jedności, aby otrzymać elementy $u_1, \ldots, u_n \in A$ takie, że

$$(\widehat{u_1} + \ldots \widehat{u_n})|_C = 1 \text{ i } \operatorname{supp}\widehat{u_j} \subset U_j \text{ dla } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Przyjmijmy $u = \sum_{j=1}^n u_j$ oraz

$$x := x_0 - x_0 u + \sum_{j=1}^n u_j x_j \in I.$$

Niech $\varphi \in \bigcup_{j=1}^{n} U_j$. Wówczas

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{u_j}(\varphi)\widehat{x_j}(\varphi) = f(\varphi)\widehat{u}(\varphi).$$

Pamiętając, że $\widehat{u}(\varphi) = 1$ dla $\varphi \in C$ i $\widehat{x_0}(\varphi) = f(\varphi)$ dla $\varphi \notin C$ otrzymujemy dla $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$

$$\widehat{x}(\varphi) = \widehat{x_0}(\varphi)(1 - \widehat{u}(\varphi)) + \sum_{j=1}^{n} \widehat{u_j}(\varphi)\widehat{x_j}(\varphi) =$$
$$\widehat{x_0}(\varphi)(1 - \widehat{u}(\varphi)) + f(\varphi)\widehat{u}(\varphi) = f(\varphi).$$

□

Wykażemy jeszcze jeden techniczny lemat.

Lemat 5.2.14. *Niech A będzie zespoloną, przemienną, regularną algebrą Banacha oraz I niech będzie ideałem w A. Wówczas $\widehat{x}$ należy lokalnie do I w każdym punkcie* $\mathrm{int}h(x)$ *i w każdym punkcie $\mathfrak{M}(A) \setminus h(I)$.*

Dowód. Z definicji, $\widehat{x}(\varphi) = 0$ dla $\varphi \in h(x)$, a więc $\widehat{x}$ należy lokalnie do I w każdym punkcie $\mathrm{int}h(x)$ (element zerowy jest w każdym ideale). Jeśli $\varphi \notin h(I)$, to istnieje $y \in I$ taki, że $\widehat{y} = 1$ w pewnym otoczeniu V punktu φ. Teraz mamy

$$\widehat{yx}(\psi) = \widehat{y}(\psi)\widehat{x}(\psi) = \widehat{x}(\psi) \text{ dla } \psi \in V,$$

oczywiście $yx \in I$, a więc $\widehat{x}$ należy lokalnie do I w φ. □

Na koniec odnotujemy pewien wniosek, którego użyjemy w następnym podrozdziale.

Wniosek 5.2.15. *Niech A będzie półprostą, zespoloną, przemienną, regularną algebrą Banacha oraz niech $x \in A$ będzie taki, że $\widehat{x}$ ma zwarty nośnik i $h(I) \cap \mathrm{supp}\widehat{x} = \emptyset$. Wówczas $x \in I$.*

Dowód. Skoro $\widehat{x}$ ma zwarty nośnik, to $\widehat{x}$ należy lokalnie do I w nieskończoności. Z ostatniego lematu $\widehat{x}$ należy lokalnie do I dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(A) \setminus h(I)$ oraz dla każdego $\varphi \in h(I)$, bo z założenia

$$h(I) \subset \mathfrak{M}(A) \setminus \mathrm{supp}\widehat{x} = \mathrm{int}h(x).$$

Wystarczy teraz zastosować twierdzenie o lokalnej przynależności. □

5.3 Synteza spektralna

Właściwą ogólnością dla tytułowych zagadnień jest klasa przemiennych, półprostych i regularnych algebr Banacha. Jak pamiętamy, oznacza to, że transformacja Gelfanda jest różnowartościowa oraz hk-topologia na $\mathfrak{M}(A)$ pokrywa się z topologią Gelfanda. Przypominamy, iż w poprzednich podrozdziałach z domkniętym podzbiorem $E \subset \mathfrak{M}(A)$ związaliśmy domknięty ideał

$$k(E) = \{a \in A : \widehat{a}(\varphi) = 0 \text{ dla wszystkich } \varphi \in \mathfrak{M}(A)\}.$$

Ponadto, określiliśmy otoczkę domkniętego ideału I jako domknięty podzbiór $\mathfrak{M}(A)$:

$$h(I) = \{\varphi \in \mathfrak{M}(A) : \varphi(I) = \{0\}\}.$$

Wówczas $h(k(E)) = E$, a więc odwzorowanie $I \mapsto h(I)$ ze zbioru wszystkich domkniętych ideałów A do klasy wszystkich domkniętych podzbiorów $\mathfrak{M}(A)$ jest surjekcją. Problem syntezy spektralnej odnosi się do pytania, kiedy to przekształcenie jest różnowartościowe lub, w większej ogólności, dla jakich domkniętych podzbiorów $E \subset \mathfrak{M}(A)$ ideał $k(E)$ jest jedynym ideałem w A, którego otoczka jest równa E.

Przykład 5.3.1. Niech A będzie przemienną C^*-algebrą A. Wówczas z twierdzenia Gelfanda-Najmarka transformacja Gelfanda zadaje izometryczny izomorfizm A na $C_0(\mathfrak{M}(A))$. Co więcej, dla dowolnej przestrzeni lokalnie zwartej X potrafimy opisać domknięte ideały w $C_0(X)$. Rzeczywiście, na mocy poprzednich wyników istnieje bijekcja pomiędzy domkniętymi podzbiorami X a domkniętymi ideałami w $C_0(X)$ zadana przez

$$Y \to I(Y) = \{f \in C_0(X) : f(x) = 0 \text{ dla wszystkich } x \in Y\}.$$

Zatem przekształcenie $E \to k(E)$ jest bijekcją pomiędzy zbiorem domkniętych podzbiorów $\mathfrak{M}(A)$ i zbiorem domkniętych ideałów w A. Oznacza to, że synteza spektralna zachodzi dla dowolnej przemiennej C^*-algebry.

Korzystając z lematów udowodnionych w poprzednim podrozdziale możemy udowodnić, iż dla danego domkniętego podzbioru $E \subset \mathfrak{M}(A)$ istnieje najmniejszy ideał w A o otoczce równej E.

Definicja 5.3.2. Dla domkniętego podzbioru $E \subset \mathfrak{M}(A)$ określamy ideał $j(E)$ w A jako

$$j(E) = \{x \in A : \widehat{x} \text{ ma zwarty nośnik oraz } \operatorname{supp}\widehat{x} \cap E = \emptyset\}.$$

Jeśli E jest singletonem $\{\varphi\}$, to piszemy po prostu $j(\varphi)$ zamiast $j(\{\varphi\})$.

Twierdzenie 5.3.3. *Niech I będzie ideałem w półprostej i regularnej przemiennej algebrze Banacha A oraz niech E będzie domkniętym podzbiorem $\mathfrak{M}(A)$. Wówczas $h(I) = E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{j(E)} \subset I \subset k(E)$. W szczególności, $\overline{j(E)}$ jest najmniejszym domkniętym ideałem w A o otoczce równej E.*

Dowód. Załóżym najpierw, że $j(E) \subset I \subset k(E)$. Wówczas, z regularności A, mamy

$$E = h(k(E)) \subset h(I) \subset h(j(E)).$$

Aby zakończyć dowód pierwszej implikacji wystarczy uzasadnić zawieranie $h(j(E)) \subset E$. Weźmy więc $\varphi \in \mathfrak{M}(A) \setminus E$ i wybierzmy warunkowo zwarte otwarte otoczenie

U funkcjonału φ o własności $\overline{U} \cap E = \emptyset$ (najpierw z aksjomatu T_3 oddzielamy φ od E zbiorami otwartymi, a potem przecinamy znalezione otoczenie φ z istniejącym z lokalnej zwartości $\mathfrak{M}(A)$ otoczeniem warunkowo zwartym). Z regularności A istnieje $x \in A$ takie, że

$$\widehat{x}(\varphi) = 1 \text{ oraz } \widehat{x}|_{\mathfrak{M}(A)\setminus U} = 0.$$

Stąd $\widehat{x}$ ma zwarty nośnik i znika na otwartym otoczeniu $\mathfrak{M}(A) \setminus \overline{U}$ zbioru E. Zatem $x \in j(E)$, ale $\varphi(x) \neq 0$, co dowodzi $\varphi \notin h(j(E))$.
Na odwrót, załóżmy że $h(I) = E$. Wtedy $I \subset k(h(I)) = k(E)$ oraz jeśli $x \in j(E)$, to $\widehat{x}$ ma zwarty nośnik, a także $h(I) \cap \operatorname{supp}\widehat{x} = \emptyset$, co pociąga za sobą $x \in I$ na mocy Wniosku 5.2.15. $\square$

Wprowadzimy teraz kluczowe definicje.

Definicja 5.3.4. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha i niech $E \subset \mathfrak{M}(A)$ będzie podzbiorem domkniętym.

1. E nazywamy *zbiorem syntezy spektralnej* lub po prostu *zbiorem syntezy*, gdy $k(E)$ jest jedynym domkniętym ideałem w A o jądrze równym E. Powiemy, że *synteza spektralna zachodzi* dla A, gdy każdy domknięty podzbiór $E \subset \mathfrak{M}(A)$ jest zbiorem syntezy.

2. E nazywa się zbiorem Ditkina dla A, gdy dla każdego $x \in k(E)$ istnieje ciąg $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ w $j(E)$ taki, że $y_k x \to x$ przy $k \to \infty$.

3. A jest tauberowska, gdy zbiór wszystkich $x \in A$ o zwartym nośniku transformaty Gelfanda, jest gęsty w A.

Warto tutaj poczynić pewną uwagę.

Uwaga 5.3.5. Załóżmy, że A jest półprosta i regularna. Wówczas Twierdzenie 5.3.3 pokazuje, że domknięty podzbiór $E \subset \mathfrak{M}(A)$ jest zbiorem syntezy wtedy i tylko wtedy, gdy $k(E) = \overline{j(E)}$, a także E jest zbiorem Ditkina wtedy i tylko wtedy, gdy E jest zbiorem syntezy oraz $x \in \overline{xk(E)}$ dla każdego $x \in k(E)$. Co więcej, A jest tauberowska dokładnie wtedy, gdy $\emptyset$ jest zbiorem syntezy spektralnej.

Używając posiadanej wiedzy udowodnimy na koniec twierdzenie zawierające klasyczne *twierdzenie Tauberowskie Wienera.*

Twierdzenie 5.3.6. *Niech A będzie przemienną, regularną, półprostą algebrą Banacha i załóżmy, że A jest tauberowska. Wówczas $h(I) \neq \emptyset$ dla każdego właściwego domkniętego ideału I w A. W szczególności, jeśli $a \in A$ spełnia $\widehat{a}(\varphi) \neq 0$ dla każdego $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$, to ideał Aa jest gęsty w A.*

Dowód. Niech I będzie właściwym domkniętym ideałem takim, że $h(I) = \emptyset$. Wówczas z Twierdzenia 5.3.3 $j(\emptyset) \subset I$, ale $j(\emptyset)$ jest gęste w A, bo A jest tauberowska. $\square$

Omówimy jeszcze najpopularniejszy kierunek badań nad syntezą spektralną.

Pytanie 5.3.7. *Czy suma dwóch zbiorów mających syntezę spektralną ma syntezę spektralną?*

Odpowiedź na to pytanie jest negatywna nawet jeśli założymy, że przestrzeń Gelfanda rozpatrywanej algebry jest dyskretna. Kontrprzykładem jest algebra Mirkila zdefiniowana jako

$$M := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \text{ jest ciągła}\},$$

z normą

$$\|f\| = \sqrt{2\pi}\|f\|_2 + \|f|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\|$$

i mnożeniem splotowym. Okazuje się, że jest to przemienna, półprosta i regularna algebra Banacha, której przestrzenią ideałów maksymalnych jest $\mathbb{Z}$. Można udowodnić, że zbiór $2\mathbb{Z} \subset \mathfrak{M}(M) = \mathbb{Z}$ nie ma syntezy spektralnej, ale zbiory $4\mathbb{Z}$ oraz $4\mathbb{Z} + 2$ już tak.
Wobec istnienia algebry Mirkila warto ograniczyć nasze rozważania do algebr grupowych. Zachodzi następujące słynne twierdzenie.

Twierdzenie 5.3.8 (Malliavin)**.** *Algebra $L^1(G)$ ma syntezę spektralną wtedy i tylko wtedy, gdy G jest zwarta.*

Najbardziej namacalnym przykładem zbioru bez syntezy spektralnej jest sfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ dla $n \geqslant 3$, która nie jest zbiorem syntezy spektralnej dla $L^1(\mathbb{R}^n)$ (*przykład Schwartza*).
Na koniec, odnotujmy jeszcze że zadane uprzednio pytanie (czy suma dwóch zbiorów mających syntezę spektralną ma syntezę spektralną) dla algebr $L^1(G)$ (G - niezwarta) jest problemem otwartym nawet dla $G = \mathbb{Z}$.

5.4 Algebra $L^1(\mathbb{R}^n)$

Zachodzi ważne twierdzenie, którego nie będziemy tutaj dowodzić.

Twierdzenie 5.4.1. *Algebra $L^1(\mathbb{R}^n)$ jest regularna.*

Powyższy fakt (prawdziwy również w większej ogólności - dla dowolnej lokalnie zwartej grupy Abelowej) pozwala nam badać algebrę $L^1(\mathbb{R}^n)$ używając niedawno poznanych metod.
Kolejnym standardowym stwierdzeniem jest tauberowskość algebry $L^1(\mathbb{R}^n)$ dowodzona zwykle w ramach kursu analizy harmonicznej (warto zwrócić uwagę, iż transformata Gelfanda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ to po prostu transformata Fouriera).

Stwierdzenie 5.4.2. *Algebra $L^1(\mathbb{R}^n)$ jest algebrą Tauberowską.*

Wprowadzimy teraz definicję podprzestrzeni niezmienniczych w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definicja 5.4.3. Domkniętą podprzestrzeń $V \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ nazywamy niezmienniczą, gdy $f \in V$ pociąga za sobą $f_x \in V$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$, gdzie $f_x(y) = f(y-x)$.

Okazuje się, że domknięte podprzestrzenie niezmiennicze to dokładnie domknięte ideały, co wyjaśnia głębokie związki pomiędzy analizą harmoniczną i teorią algebr Banacha.

Twierdzenie 5.4.4. *Każda domknięta podprzestrzeń niezmiennicza $L^1(\mathbb{R}^n)$ jest ideałem i na odwrót - każdy domknięty ideał jest podprzestrzenią niezmienniczą.*

Dowód. Dla $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ oraz $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ zachodzi

$$(f * g * \phi)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(-x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(-y)(f * \phi)(y)dy. \tag{5.1}$$

Załóżmy, że I jest domkniętą podprzestrzenią niezmienniczą i niech ϕ anihiluje I (jako funkcjonał na $L^1(\mathbb{R}^n)$ oraz niech $f \in I$. Oznacza to, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(-y)\phi(y)dy = 0, \text{ co pociąga za sobą}$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\phi(y)dy = 0 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}^n, \text{ bo } f_x \in I.$$

Stąd $f * \phi = 0$. Z tożsamości (5.1) ϕ anihiluje $f * g$ dla każdego $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Twierdzenie Hahna-Banacha $f * g \in I$, więc I jest ideałem.
W drugą stronę, jeśli I jest domkniętym ideałem i ϕ anihiluje I oraz $f \in I$, to $f * g \in I$ dla dowolnego $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a zatem z równania (5.1) $f * \phi$ anihiluje każde $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, czyli $f * \phi = 0$. Wobec tego ϕ anihiluje dowolne przesunięcie f, co w oparciu o twierdzenie Hahna-Banacha kończy dowód. □

Odnotujmy jeszcze kilka równoważny form twierdzenia Tauberowskiego Wienera.

Twierdzenie 5.4.5 (Tauberowskie Wienera)**.** *Zachodzą następujące fakty.*

1. *Jeśli I jest domkniętym ideałem w $L^1(\mathbb{R}^n)$ takim, że $h(I) = \emptyset$, to $I = L^1(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Każdy domknięty ideał właściwy w $L^1(\mathbb{R}^n)$ jest zawarty w ideale maksymalnym modularnym.*
3. *Przesunięcia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ są liniowo gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\widehat{f}(x) \neq 0$ dla każdego $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Dowód. Pierwsze dwa punkty to łatwe przeformułowania Twierdzenia 5.3.6. Dla dowodu punktu 3. niech I będzie najmniejszym domkniętym ideałem w $L^1(\mathbb{R}^n)$ zawierającym f. Z Twierdzenia 5.4.4 I jest przestrzenią rozpiętą przez przesunięcia f. Skoro $h(I) = h(f)$ to zastosowanie punktu 1. kończy uzasadnienie. □

Poznamy teraz klasyczny przykład Schwartza bardzo regularnego zbioru bez syntezy spektralnej.

Twierdzenie 5.4.6 (Schwartz)**.** *Sfera jednostkowa S w $\mathbb{R}^3$ nie jest zbiorem syntezy spektralnej dla $L^1(\mathbb{R}^3)$.*

Dowód. Niech f będzie odwrotną transformatą Fouriera $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, czyli

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(y) e^{ix\cdot y} dy \text{ dla } x \in \mathbb{R}^3.$$

Wówczas odwrotną tranformatą $\frac{\partial\phi}{\partial y_k}$ jest $-ix_k f(x)$. Skoro wszystkie pochodne ϕ są w $L^1(\mathbb{R}^3)$, to $|x|^p|f(x)| \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ dla $p = 0, 1, 2, \ldots$, a zatem $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$, czyli $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subset A(\mathbb{R}^3) := \{\widehat{g} : g \in L^1(\mathbb{R}^3)\}$ ze standardowych faktów o transformacie Fouriera. Niech J będzie zbiorem tych $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$, dla których $\widehat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $\widehat{f}(y) = 0$ dla $y \in S$ i niech I będzie zbiorem tych $f \in J$, które spełniają dodatkowo $\frac{\partial\widehat{f}}{\partial y_1} = 0$ na S. Wówczas I oraz J są podprzestrzeniami niezmienniczymi $L^1(\mathbb{R}^n)$. Łatwo zauważyć, że $h(\overline{I}) = h(\overline{J}) = S$.
Udowodnimy, że $\overline{I} \neq \overline{J}$ wskazując funkcjonał liniowy, który anihiluje I, ale nie J. Niech μ będzie miarą jednostajną na S. Jej odwrotną transformatą Fouriera-Stieltjesa jest

$$\widehat{\mu}(x) = \int_S e^{ix\cdot y} d\mu(y) \text{ dla } x \in \mathbb{R}^3.$$

Ustalmy $x \in \mathbb{R}^3$ i wprowadźmy współrzędne sferyczne na E z biegunem w punkcie $\frac{x}{|x|}$. Wówczas

$$\widehat{\mu}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi e^{i|x|\cos\theta} \sin\theta d\theta = \frac{\sin|x|}{|x|}.$$

Zatem $|x_1\widehat{\mu}| \leqslant 1$ dla $x \in \mathbb{R}^3$ i wyrażenie

$$\Phi f = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) x_1 \widehat{\mu}(-x) dx$$

określa ograniczony funkcjonał na $L^1(\mathbb{R}^3)$. Jeśli $\widehat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, to $x_1 f(x) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ i stąd

$$\Phi f = \int_{\mathbb{R}^3} x_1 f(x) dx \int_S e^{-ix\cdot y} d\mu(y) = i(2\pi)^3 \int_S \frac{\partial\widehat{f}}{\partial y_1} d\mu.$$

Zatem $\Phi f = 0$, gdy $f \in I$. Jednak jasne jest, że istnieją funkcje w J, dla których ostatnia całka jest różna od zera. $\square$

Podamy na koniec szeroką klasę zbiorów syntezy spektralnej.

Definicja 5.4.7. Powiemy, że domknięty podzbiór $E \subset \mathbb{R}^n$ jest ciałem gwiaździstym, gdy istnieje punkt wewnętrzny $p_0 \in E$ o tej własności, iż każda prosta przechodząca przez punkt p_0 przecina E w co najwyżej dwóch punktach.

Stwierdzenie 5.4.8. *Każde ciało gwiaździste w* $\mathbb{R}^n$ *jest zbiorem syntezy spektralnej.*

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $p_0 = 0$. Weźmy $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ spełniające $\widehat{f} = 0$ na E i niech $\alpha \in (0,1)$. Dobierzmy $\beta \in \mathbb{R}$ tak, aby $\alpha\beta = 1$ i połóżmy $g(x) = f(\beta x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas $\widehat{g}(y) = \alpha^n \widehat{f}(\alpha y)$. Skoro $\alpha < 1$, to $\widehat{g}(y) = 0$ na otwartym zbiorze zawierającym E. Oczywiście $g \in \overline{j(E)}$ oraz $\|g - f\|_1 < \varepsilon$ dla β dostatecznie bliskiego 1. $\square$

Rozdział 6

Tematy uzupełniające

6.1 Dodatek A: Funkcje holomorficzne i całkowanie

Definicja 6.1.1. Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ krzywą prostowalną. Wówczas dla funkcji $f : \gamma([a, b]) \mapsto X$ rozważamy podziały

$$\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

odcinka $[a, b]$. Niech $\delta(\mathfrak{Z}) = \max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Jeśli istnieje granica

$$\lim_{\delta(\mathfrak{Z}) \to 0} \sum_{j=1}^{n} (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) f(\gamma(t_j)),$$

to nazywamy ją całką Riemanna z funkcji f wzdłuż krzywej γ i oznaczamy

$$\int_\gamma f(z) dz.$$

Przypomnimy teraz klasyczne twierdzenie, którego nie będziemy tutaj dowodzić, gdyż dowód jest analogiczne do tego znanego z kursu analizy.

Twierdzenie 6.1.2. *Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ krzywą prostowalną. Wówczas dla każdej funkcji ciągłej $f : \gamma([a, b]) \mapsto X$ istnieje całka Riemanna z funkcji f względem krzywej γ.*

Istnieje również inne podejście do całkowania funkcji o wartościach wektorowych zwane *całką słabą*.

Definicja 6.1.3. Niech μ będzie miarą na przestrzeni mierzalnej Q i niech X będzie przestrzenią Banacha. Dla funkcji $f : Q \mapsto X$ zdefiniujmy

$$(\Lambda f)(q) = \Lambda(f(q)) \text{ dla } q \in Q \text{ oraz } \Lambda \in X^*.$$

Załóżmy, że funkcja f jest taka, że funkcje skalarne Λf są całkowalne dla każdego $\Lambda \in X^*$. Jeśli istnieje wektor $y \in X$ taki, że

$$\Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu \text{ dla wszystkich } \Lambda \in X^*,$$

to definiujemy całkę słabą z f po Q jako

$$y = \int_Q f d\mu.$$

Zauważmy, że twierdzenie Hahna - Banacha zapewnia jednoznaczność słabej całki (o ile ona istnieje). Relacja z całką Riemanna jest również prosta - ponieważ całka Riemanna wzdłuż krzywej jest mocną granicą sum Riemanna można wejść z funkcjonałami pod granicę, co prowadzi do poniższego faktu.

Fakt 6.1.4. *Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz f funkcją o wartościach w X określoną na $\gamma([a,b])$, gdzie $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ jest krzywą prostowalną. Wówczas, jeśli f ma całkę Riemanna wzdłuż krzywej γ, to ma całkę słabą na $\gamma([a,b])$ i są one równe.*

Przy rozważaniu funkcji o wartościach w algebrze Banacha przydatna jest możliwość mnożenia całki przez elementy algebry, o której mówi poniższe stwierdzenie (odnosi się ono w myśl powyższego faktu w szczególności do funkcji, które mają całkę Riemanna).

Stwierdzenie 6.1.5. *Niech A będzie algebrą Banacha oraz $f : Q \mapsto A$ będzie taka, że całka słaba po Q względem pewnej miary borelowskiej μ istnieje. Wówczas dla każdego $x \in A$ zachodzi*

$$x \int_Q f d\mu = \int_Q x f(p) d\mu(p) \text{ oraz } \left(\int_Q f d\mu \right) x = \int_Q f(p) x d\mu(p).$$

Dowód. Oznaczmy przez $L_x : A \mapsto A$ operator lewostronnego mnożenia przez x, czyli $L_x(y) = xy$ dla $y \in A$ i niech Λ będzie ograniczonym funkcjonałem liniowym na A. Wówczas $\Lambda L_x \in A^*$, a więc z definicji całki słabej

$$\Lambda L_x \int_Q f d\mu = \int_Q (\Lambda L_x f) d\mu = \Lambda \int_Q L_x f d\mu.$$

Powyższa tożsamość zachodzi dla wszystkich $\Lambda \in A^*$, czyli

$$L_x \int_Q f d\mu = \int_Q L_x f d\mu,$$

co jest dokładnie tezą (dla dowodu drugiej części zamieniamy mnożenie lewostronne na prawostronne). $\square$

Dla kompletności udowodnimy również twierdzenie o istnieniu słabej całki względem miary dodatniej (symbol $\overline{\text{conv}}(f(Q))$ oznacza domkniętą otoczkę wypukłę zbioru $f(Q)$).

Twierdzenie 6.1.6. *Niech Q będzie przestrzenią zwartą, X - przestrzenią Banacha oraz niech $f : Q \mapsto X$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas, dla dowolnej dodatniej miary borelowskiej μ na Q istnieje całka słaba*

$$y = \int_Q f d\mu \text{ o dodatkowej własności } y \in \overline{\mathrm{conv}}(f(Q)).$$

Dowód. Będziemy patrzeć na X jako na rzeczywistą przestrzeń liniową. Ponadto, bez straty ogólności możemy zakładać, iż miara μ jest probabilistyczna. Niech $H = \mathrm{conv}(f(Q))$. Mamy wykazać, że istnieje $y \in \overline{H}$ o własności

$$\Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu \tag{6.1}$$

dla $\Lambda \in X^*$. Niech $L = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ będzie skończonym podzbiorem X^* i przez E_L oznaczmy zbiór wszystkich $y \in \overline{H}$ spełniających (6.1) dla $\Lambda \in L$. Zbiór E_L jest domknięty z ciągłości funkcjonałów, a więc jako podzbiór $\overline{H}$ jest zwarty (fakt, że $\overline{H}$ jest zwarte wynika z ogólnego faktu - domknięta otoczka wypukła zbioru zwartego jest zwarta). Zauważmy, że $E_{L_1} \cap E_{L_2} = E_{L_1 \cup L_2}$, co dowodzi natychmiast, iż rodzina $\{E_L : L \subset X^* \text{ skończone podzbiory}\}$ ma własność skończonych przecięć (jest scentrowana), o ile każdy ze zbiorów E_L jest niepusty. Z własności przestrzeni zwartych wynikać będzie istnienie słabej całki, gdy uzasadnimy niepustość E_L dla wszystkich L. Zwróćmy uwagę, że zbiór L definiuje odwzorowanie z X do $\mathbb{R}^n$, które oznaczmy również przez L, określone wzorem $L(x) = (\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_n(x))$. Niech $K = L(f(Q))$. Oczywiście odwzorowanie L jest ciągłe, więc K jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Połóżmy

$$m_i = \int_Q (\Lambda_i f) d\mu \text{ dla } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Wykażemy, że $m = (m_1, \dots, m_n)$ należy do powłoki wypukłej K. Istotnie, jeśli punkt $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ nie należy do $\mathrm{conv}(K)$, to pamiętając że $\mathrm{conv}(K)$ jest zwarte (w szczególności domknięte) możemy zastosować twierdzenie Hahna-Banacha o rozdzielaniu do puntku t i zbioru $\mathrm{conv}(K)$. Dzięki znajomości postaci funckjonałów liniowych na $\mathbb{R}^n$ dostajemy istnienie liczb $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$ spełniających

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \text{ dla dowolnego } u = (u_1, \dots, u_n) \in K.$$

Stąd

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Lambda_i f(q) < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \text{ dla } q \in Q.$$

Scałkowanie względem miary μ daje teraz $\sum c_i m_i < \sum c_i t_i$, co uzasadnia $t \neq m$. Wykazaliśmy wobec tego $m \in \mathrm{conv}(K)$. Dalej, $m \in \mathrm{conv}(K) = \mathrm{conv}(L(f(Q))) = L(\mathrm{conv}(f(Q))) = L(H)$. Zatem istnieje $y \in H$ takie, że $m = Ly$, czyli

$$\Lambda_i y = m_i = \int_Q (\Lambda_i f) d\mu \text{ dla } i \in \{1, \dots, n\},$$

a więc $y \in E_L$, co kończy dowód. $\square$

Rozważania dotyczące całek z funkcji o wartościach wektorowych zakończymy dowodem nierówności trójkąta.

Fakt 6.1.7 (Nierówność trójkąta)**.** *Niech Q będzie przestrzenią zwartą i niech X będzie przestrzenią Banacha. Jeśli $f : Q \mapsto X$ jest funkcją ciągłą, a μ dodatnią miarą borelowską na Q, to*

$$\| \int_Q f d\mu \| \leqslant \int_Q \|f\| d\mu.$$

Dowód. Połóżmy $y = \int f d\mu$. Z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje $\Lambda \in X^*$ spełniające $\|\Lambda\| = 1$ oraz $\Lambda y = \|y\|$. W szczególności mamy $|\Lambda f(s)| \leqslant \|f(s)\|$ dla $s \in Q$. Zatem,

$$\|y\| = \Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu \leqslant \int_Q \|f\| d\mu.$$

$\square$

Przechodzimy teraz do zagadnień związanych z funkcjami holomorficznymi o wartościach wektorowych. Jak się domyślamy, istnieją dwie naturalne definicje tego pojęcia.

Definicja 6.1.8. Niech X będzie przestrzenią Banacha, Ω otwartym podzbiorem $\mathbb{C}$ oraz $f : \Omega \mapsto X$. Funkcję f nazwiemy:

- *słabo holomorficzną* w Ω, gdy Λf jest funkcją holomorficzną dla każdego $\Lambda \in X^*$,
- *mocno holomorficzną* w Ω, gdy dla każdego $z \in \Omega$ istnieje (w normie X) granica
$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Z ciągłości funkcjonałów wynika łatwo, że każda funkcja mocno holomorficzna jest słabo holomorficzna. Udowodnimy zaraz ważne twierdzenie odwrotne, pamiętając że dla krzywej zamkniętej Γ nie przechodzącej przez $z \in \mathbb{C}$ indeks tego punktu względem Γ będziemy oznaczać przez $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$. Jak pamiętamy z teorii funkcji analitycznych

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Twierdzenie 6.1.9. *Niech Ω będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{C}$ i niech X będzie zespoloną przestrzenią Banacha. Załóżmy, że $f : \Omega \mapsto X$ jest funkcją słabo holomorficzną. Wówczas*

1. *f jest mocno ciągła na Ω.*

2. *Prawdziwe są twierdzenie Cauchy'ego i wzór całkowy Cauchy'ego: jeśli* Γ *jest sensowną krzywą zamkniętą w* Ω *taką, że* $\mathrm{Ind}_\Gamma(w) = 0$ *dla wszystkich* $w \notin \Omega$*, to*

$$\int_\Gamma f(\xi)d\xi = 0$$

oraz

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\xi - z)^{-1} f(\xi)d\xi$$

dla $z \in \Omega$ *takich, że* $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1$*. Jeśli* Γ_1 *i* Γ_2 *są zamkniętymi krzywymi w* Ω *takimi, że* $\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(w) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(w)$ *dla wszystkich* $w \notin \Omega$*, to*

$$\int_{\Gamma_1} f(\xi)d\xi = \int_{\Gamma_2} f(\xi)d\xi.$$

3. *f jest mocno holomorficzna w* Ω*.*

Dowód. Zaczynamy od dowodu punktu pierwszego. Załóżmy, że $0 \in \Omega$. Wykażemy, że f jest mocno ciągła w zerze. Możemy bez straty ogólności zakładać, że $f(0) = 0$, a więc $(\Lambda f)(0) = \Lambda(f(0)) = 0$. Przyjmijmy oznaczenie

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}.$$

Wówczas dla pewnego $r > 0$ zachodzi $B_{2r} \subset \Omega$. Niech Γ będzie brzegiem B_{2r} (okręgiem) z dodatnią orientacją. Ustalmy $\Lambda \in X^*$. Wiemy, że Λf jest holomorficzna, więc dla $0 < |z| < 2r$ mamy

$$\frac{(\Lambda f)(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\Lambda f)(\xi)}{(\xi - z)\xi}d\xi.$$

Oznaczmy przez $M(\Lambda)$ maksimum funkcji $|\Lambda f|$ na B_{2r}. Wtedy, dla $0 < |z| \leqslant r$ mamy oszacowanie

$$\left|\frac{(\Lambda f)(\xi)}{(\xi - z)\xi}\right| \leqslant \frac{M(\Lambda)}{2r^2},$$

a więc dla $0 < |z| \leqslant r$ dostajemy

$$|z^{-1}\Lambda(f(z))| \leqslant r^{-1}M(\Lambda).$$

Oznacza to, że zbiór

$$\left\{\frac{f(z)}{z} : 0 < |z| \leqslant r\right\}$$

jest słabo ograniczony w X. Z twierdzenia Banacha - Steinhausa jest on silnie ograniczony, czyli istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\frac{||f(z)||}{|z|} \leqslant C \text{ dla } 0 < |z| \leqslant r.$$

Zatem $||f(z)|| \leqslant C|z|$ dla $0 < |z| \leqslant r$, co dowodzi mocnej ciągłości w punkcie 0. Z punktu 1. wszystkie całki występujące w tezie punktu 2. istnieją jako całki

Riemanna. Z teorii zwyczajnych funkcji holomorficznych wiemy, że wszystkie wymienione fakty są prawdziwe po podstawieniu Λf zamiast f. W oparciu o Fakt 6.1.4 kończymy dowód tego podpunktu.
Rozpoczynamy tak jak w dowodzie punktu 1. (uzasadnimy silną holomorficzność w zerze i przyjmujemy $f(0) = 0$) - $B_{2r} \subset \Omega$ oraz Γ to brzeg B_{2r}. Zdefiniujmy

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \xi^{-2} f(\xi) d\xi.$$

Napiszmy dla $0 < |z| < 2r$

$$\frac{f(z)}{z} = y + h(z).$$

Wówczas w oparciu o wzór Cauchy'ego dostajemy

$$\begin{aligned} h(z) = \frac{f(z)}{z} - y = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)\xi} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi = \\ = \frac{z}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi^2 (\xi - z)} d\xi. \end{aligned}$$

Parametryzując okrąg i korzystając ze wzoru na całkę krzywoliniową otrzymujemy

$$h(z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(2re^{i\theta})}{2re^{i\theta}(2re^{i\theta} - z)} d\theta.$$

Niech M będzie maksimum funkcji f na Γ. Wówczas, dla $0 < |z| \leqslant r$ uzyskujemy oszacowanie

$$|h(z)| \leqslant \frac{M|z|}{2r^2},$$

a więc y jest mocną pochodną f w punkcie 0. □

Odnotujmy jeszcze uogólnienie twierdzenie Liouville'a na funkcje o wartościach wektorowych.

Twierdzenie 6.1.10 (Liouville)**.** *Niech $f : \mathbb{C} \mapsto X$ będzie ograniczoną funkcją słabo holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej. Wówczas f jest stała.*

Dowód. Niech $\Lambda \in X^*$. Wówczas, z definicji, funkcja $z \mapsto \Lambda f(z)$ jest całkowita oraz zachodzi oszacowanie

$$|\Lambda f(z)| \leqslant \|\Lambda\| \cdot \sup_{z \in \mathbb{C}} \|f(z)\| < \infty.$$

Z klasycznego twierdzenia Louville'a funkcja $z \mapsto \Lambda f(z)$ jest stała. Weźmy dwie dowolne liczby $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wobec powyższego, dla dowolnego $\Lambda \in X^*$ zachodzi

$$\Lambda(f(z_1)) = \Lambda(f(z_2)) \Leftrightarrow \Lambda(f(z_1) - f(z_2)) = 0.$$

Teraz zastosowanie twierdzenia Hahna-Banacha kończy dowód. □

6.2 Dodatek B: Twierdzenie Cohena o faktoryzacji

W tym podrozdziale udowodnimy klasyczne i bardzo użyteczne twierdzenie Cohena o faktoryzacji. Zacznijmy od wprowadzenia pojęcia *jedynki aproksymacyjnej*.

Definicja 6.2.1. Niech A będzie algebrą Banacha. Ciąg uogólniony $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ nazywamy lewostronną (prawostronną) jedynką aproksymacyjną, gdy dla każdego $x \in A$ zachodzi

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|e_\lambda x - x\| = 0 \ \left(\lim_{\lambda\in\Lambda} \|x e_\lambda - x\| = 0\right).$$

Jedynką aproksymacyjną nazywamy ciąg uogólniony, który jest jednocześnie lewo- i prawostronną jedynką.
Lewostronną jedynkę aproksymacyjną nazywamy ograniczoną, gdy istnieje stała $C > 0$ taka, że $\|e_\lambda\| \leqslant C$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$.

Wiele klasycznych typów algebr ma ograniczone jedynki aproskymacjne.

Przykład 6.2.2. 1. Każda C^*-algebra ma ograniczoną jedynkę aproksymacyjną.

2. Algebra $L^1(G)$ dla dowolnej lokalnie zwartej grupy Abelowej ma jedynkę aproksymacjną.

Jako przygotowanie przypomnijmy sobie następujący lemat.

Lemat 6.2.3. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz $a, b \in A$. Załóżmy, że $b \in G(A)$ oraz $\|a - b\| < \frac{1}{2}\|b^{-1}\|^{-1}$. Wówczas $a \in G(A)$ oraz $\|a^{-1} - b^{-1}\| < 2\|b^{-1}\|^2\|a - b\|$.*
Ponadto gdy dla ustalonego $c \in (0, 1)$ oraz $e \in A$ spełniającego $\|e\| \leqslant K$ położymy $E := 1 - c + ce$, to E jest odwracalne, o ile $0 < c < \frac{1}{K+1}$ oraz $\|E^{-1}\| \leqslant 2$, gdy $0 < c < \frac{1}{2}\frac{1}{K+1}$.

Udowodnimy teraz pewne uogólnienie klasycznego twierdzenia Cohena (zobacz: Mortini, Raymond: 'A simpler proof of Cohen's factorization theorem'. Amer. Math. Monthly 126 (2019), no. 5, 459–463.)

Twierdzenie 6.2.4. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką oraz niech I będzie właściwym domkniętym ideałem lewostronnym ($A \cdot I \subset I$), który ma ograniczoną lewostronną jedynkę aproksymacyjną $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ spełniającą $\|e_\lambda\| \leqslant K$ dla $\lambda \in \Lambda$. Wówczas zachodzą następujące fakty:*

1. *Dla każdego $f \in I$ istnieją $g, h \in I$ takie, że $f = gh$.*

2. *Dla każdego $\delta > 0$ istnieją $g, h \in I$ spełniające:*

   - *$f = gh$,*

- $\|g\| \leqslant K$,
- $\|h - f\| \leqslant \delta$,
- $h \in \overline{Af}$

Dowód. Ustalmy $f \in I$, $0 < \delta < 1$ i niech $0 < c < \frac{\delta}{4(K+1)(1+\|f\|)}$. Połóżmy $g_0 = 1$. Uzasadnimy, że istnieją $e_n = e_{\lambda_n}$ z $\lambda_n \in \Lambda$ takie, że

1. Element $g_n := 1 + c\sum_{k=1}^{n}(1-c)^{k-1}(e_k - 1)$ jest odwracalny w A,
2. $\|g_n^{-1}f - g_{n-1}^{-1}f\| \leqslant \frac{\delta}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Załóżmy, że powyższy ciąg został już skonstruowany i sprawdźmy warunek z tezy twierdzenia.
Połóżmy $h_n = g_n^{-1}f$. Wówczas $h_n \in Af \subset I$ oraz $\|h_n - h_{n-1}\| \leqslant \frac{\delta}{2^n}$, co w połączeniu z nierównością $\|h_m - h_n\| \leqslant \sum_{j=n}^{m-1}\|h_{j+1} - h_j\|$ prowadzi do wniosku, iż $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Z domkniętości I istnieje $h \in I$ spełniające $\|h_n - h\| \to 0$ przy $n \to \infty$. ZNiech $0 < c < 1$ i $\|e_k\| \leqslant K$ wynika, że sumy częściowe szeregu oznaczone przez g_n są zbieżne w A do pewnego $g \in A$:

$$g := 1 + c\sum_{k=1}^{\infty}(1-c)^{k-1}(e_k - 1).$$

Skoro

$$g = 1 - c\frac{1}{1-(1-c)} + c\sum_{k=1}^{\infty}(1-c)^{k-1}e_k = c\sum_{k=1}^{\infty}(1-c)^{k-1}e_k,$$

to $\|g\| \leqslant K$ oraz $g \in I$, bo $e_n \in I$. Co więcej,

$$g_n h_n = g_n(g_n^{-1}f) = f, \text{ a stąd}$$
$$gh = \lim_{n\to\infty} g_n \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty}(g_n h_n) = f.$$

Stąd $h \in \overline{Af}$, bo $h_n \in Af$. Dalej

$$\|h_n - f\| = \|g_n^{-1}f - f\| \leqslant \left\|\sum_{j=2}^{n}(g_j^{-1}f - g_{j-1}^{-1}f)\right\| + \|g_1^{-1}f - f\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=2}^{n}\frac{\delta}{2^j} + \frac{\delta}{2} \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

co pozwala wywnioskować, że $\|h - f\| \leqslant \delta$.
Przechodzimy teraz do dowodu istnienia elementów e_n.
Połóżmy $e_1 = e_{\lambda_1}$, gdzie $\lambda_1 \in \Lambda$ i zdefiniujmy $g_1 := 1 - c + ce_1$. Wtedy z Lematu 6.2.3 g_1 jest odwracalne w A oraz

$$\|g_1 - 1\| = c\|e_1 - 1\| \leqslant \frac{\delta}{4(K+1)(1+\|f\|)} \cdot (K+1) = \frac{\delta}{4(1+\|f\|)}.$$

Znów z Lematu 6.2.3 dostajemy $\|g_1^{-1} - 1\| < 2\|g_1 - 1\|$. Prowadzi to do uzasadnienie drugiego warunku dla $n = 1$: $\|g_1^{-1}f - f\| \leqslant \|g_1^{-1} - 1\| \cdot \|f\| < \frac{\delta}{2}$.
Załóżmy, że elementy e_j zostały wybrane dla $j = 1, \ldots, n$. Niech $f_n := \sum_{k=1}^{n} c(1-c)^{k-1}e_k$. Wtedy $f_n \in I$ i dodatkowo $f_n = g_n - (1-c)^n$. Wybierzmy ε_{n+1} tak, aby

$$0 < \varepsilon_{n+1} < \min\left\{\frac{1}{4}\|g_n^{-1}\|^{-1}, \left(8\|g_n^{-1}\|^2\|f\| + 2\|g_n^{-1}\|\right)^{-1}\frac{\delta}{2^{n+1}}\right\}.$$

Skoro (e_λ) jest lewostronną jedynką aproksymacyjną dla I istnieje $e_{n+1} := e_{\lambda_{n+1}} \in I$ takie, że

$$\|e_{n+1}f_n - f_n\| < \varepsilon_{n+1}, \ \|e_{n+1}f - f\| < \varepsilon_{n+1}.$$

Określmy

$$g_{n+1} := 1 + c\sum_{k=1}^{n+1}(1-c)^{k-1}(e_k - 1).$$

Mamy

$$g_{n+1} - g_n = c(1-c)^n(e_{n+1} - 1) \text{ i dalej}$$
$$g_{n+1} - (1 - c + ce_{n+1})g_n = (g_n + c(1-c)^n(e_{n+1} - 1)) - g_n + c(1 - e_{n+1})g_n =$$
$$= c(1 - e_{n+1})(g_n - (1-c)^n) = c(1 - e_{n+1})\sum_{j=1}^{n} c(1-c)^{j-1}e_j = c(f_n - e_{n+1}f_n).$$

Niech $E := E_{n+1} := 1 - c + ce_{n+1}$. Skoro $c < \frac{1}{2}(K+1)^{-1}$, to z Lematu 6.2.3 dostajemy $\|E^{-1}\| \leqslant 2$. Stąd

$$\|g_{n+1} - Eg_n\| \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{\|g_n^{-1}\|} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\|g_n^{-1}\|\|E^{-1}\|} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\|(Eg_n)^{-1}\|}.$$

Z Lematu 6.2.3 $g_{n+1} \in G(A)$, a także

$$\|g_{n+1}^{-1} - (Eg_n)^{-1}\| < 2\|(Eg_n)^{-1}\|^2\|g_{n+1} - Eg_n\|.$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned}\triangle := \|g_{n+1}^{-1}f - g_n^{-1}f\| &= \left\|\left(g_{n+1}^{-1}f - g_n^{-1}E^{-1}f\right) + \left(g_n^{-1}E^{-1}f - g_n^{-1}f\right)\right\| \leqslant \\ &\leqslant \|g_{n+1}^{-1} - g_n^{-1}E^{-1}\| \cdot \|f\| + \|g_n^{-1}\| \cdot \|E^{-1}f - f\| = \\ &= \|g_{n+1}^{-1} - g_n^{-1}E^{-1}\| \cdot \|f\| + \|g_n^{-1}\| \cdot \|E^{-1}(f - Ef)\|.\end{aligned}$$

Ponieważ $\|f - Ef\| = \|f - (1 - c + ce_{n+1})f\| = c\|f - e_{n+1}f\|$, to wnioskujemy, że

$$\triangle \leqslant 2\|(Eg_n)^{-1}\|^2\|g_{n+1} - Eg_n\| \cdot \|f\| + \|g_n^{-1}\|\|E^{-1}\| \cdot c \cdot \|f - e_{n+1}f\|.$$

Zatem z Lematu 6.2.3 uzyskujemy $\|E^{-1}\| \leqslant 2$ i $0 < c \leqslant 1$, co daje

$$\triangle \leqslant 2\|g_n^{-1}\|^2\|E^{-1}\|^2\|f\| \cdot c \cdot \|f_n - e_{n+1}f_n\| + 2\|g_n^{-1}\| \cdot c \cdot \varepsilon_{n+1} \leqslant$$
$$8\|g_n^{-1}\|\|f\|\varepsilon_{n+1} + 2\|g_n^{-1}\|\varepsilon_{n+1} \leqslant \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

□

Wywnioskujemy teraz klasyczne twierdzenie Cohena o faktoryzacji.

Twierdzenie 6.2.5. *Niech B będzie algebrą Banacha bez jedynki posiadającą lewostronną ograniczoną jedynkę aproksymacyjną. Wówczas każde $f \in B$ może zostać zapisane jako $f = gh$ dla pewnych $g, h \in B$.*

Dowód. Wystarczy zanurzyć B w algebrę z dołączoną jedynką i zastosować Twierdzenie 6.2.4. □

Zachodzi ciekawe uogólnienie w języku modułów[1].

Twierdzenie 6.2.6 (Hewitt)**.** *Niech A będzie przemienną algebrą Banacha, a I właściwym domkniętym ideałem w A oraz niech $(X, \|\cdot\|_X)$ będzie lewostronnym A-modułem Banacha. Załóżmy, że I ma K-ograniczoną jedynkę aproksymacyjną w odniesieniu do X, czyli istnieje ciąg uogólniony $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset I$ taki, że $\lim \|e_\lambda f - f\| = 0$ dla $f \in I$ oraz $\lim \|e_\lambda x - x\| = 0$ dla każdego $x \in X$. Wtedy dla każdego $\delta > 0$ i $x \in X$ istnieje $g \in I$ oraz $y \in X$ spełniające:*

- $x = gy$,
- $\|g\|_A \leqslant K$,
- $\|y - x\|_X < \delta$.

Ciekawym ogólnym zastosowaniem powyższego twierdzenia jest następujący fakt.

Twierdzenie 6.2.7 (Varopoulos)**.** *Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jedynką i niech I będzie domkniętym ideałem właściwym. Załóżmy, że I ma ograniczoną jedynkę aproksymacyjną. Wtedy*

1. *Dla każdego ciągu zbieżnego do zera $(f_n) \subset I$ istnieje $g \in I$ oraz $h_n \in I$ spełniające $f_n = gh_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\|h_n\| \to 0$.*
2. *Dla każdego ciągu $(a_n) \subset I$ istnieje $b \in I$ oraz $c_n \in I$ spełniające $a_n = bc_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Stosujemy twierdzenie Hewitta do lewego A-modułu Banacha $X = \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : f_n \in I, \|f_n\| \to 0\}$. □

[1] Lewostronny A-moduł Banacha X to przestrzeń Banacha X wraz z określonym działaniem $A \times X \to X$ spełniającym standardowe warunki modułu oraz dodatkowo $\|a \cdot x\|_X \leqslant C\|a\|_A \cdot \|x\|_X$ dla pewnej stałej $C > 0$ i wszystkich $a \in A$, $x \in X$