Przestrzenie Sobolewa

Na podstawie wykładu dra Pawła Goldsteina spisał Przemysław Ohrysko

5 maja 2013

Zaczynamy od przypomnienia wiadomości z teorii miary.

Definicja 1. *Funkcję $f : E \mapsto \mathbb{R}$ określoną na zbiorze mierzalnym $E \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy mierzalną, gdy*

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} f^{-1}([-\infty, a]) \text{ jest mierzalny.}$$

Klasa funkcji mierzalnych jest zamknięta na podstawowe operacje (sup, inf, limsup, liminf). Ponadto, funkcja mierzalna jest granicą (punktowo zbieżnego) ciągu funkcji prostych oraz schodkowych (funkcje proste sumy wyrażeń postaci $a_i\chi_{E_i}$, a schodkowe to sumy funkcji charakterystycznych przedziałów w $\mathbb{R}^n$).
Przechodzimy teraz do **Trzech zasad Littlewooda**.
1. Każdy zbiór mierzalny o mierze skończonej jest "niemal" sumą przedziałów.

Twierdzenie 2. *Jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem mierzalnym o skończonej mierze, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina kostek $Q_1, \ldots, Q_k$ taka, że $|A \setminus \bigcup Q_k \cup \bigcup Q_k \setminus A| < \varepsilon$.*

Dowód wynika z konstrukcji miary Lebesgue'a, która określa miarę zbioru A jako

$$|A| = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i|, \text{ gdzie infimum jest brane po rodzinach kostek pokrywających A.}$$

Stąd wynika, że istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\sum_{i=k}^{\infty} |Q_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. Teraz mamy

$$\left|A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} Q_i\right| < \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k} Q_i\right| \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} |Q_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Zatem $|\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \setminus A| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| - |A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wybierając na początku pokrycie takie, by $\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| < |A| + \frac{\varepsilon}{2}$ dostajemy tezę.
2. Każda funkcja mierzalna jest prawie ciągła.

Twierdzenie 3 (Łuzin)**.** *Niech $f : E \mapsto \mathbb{R}$ będzie mierzalna $|E| < \infty$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $F_\varepsilon \subset E$ takie, że $f|_{F_\varepsilon}$ jest ciągła.*

Uwaga 4. *Istnieje funkcja ciągła $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ taka, że $\sup_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f} \leqslant \sup_E f$ oraz $\left|\{s \in E : \widetilde{f}(x) \neq f(x)\}\right| < \varepsilon$.*

3. Każdy ciąg punktowo zbieżny jest zbieżny prawie jednostajnie.

Twierdzenie 5 (Jegorow)**.** *Niech f_k będzie ciągiem funkcji mierzalnych, $f_k : E \mapsto \mathbb{R}$, $|E| < \infty$ oraz $f_k(x) \to f(x)$ dla prawie wszystkie $x \in E$. Wówczas, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje domknięty podzbiór $A_\varepsilon \subset E$ taki, że $f_i \to f$ jednostajnie na A_ε oraz $|E \setminus A_\varepsilon| < \varepsilon$.*

Dowód. 1. Wybierzmy $\widetilde{E} \subset E$, $|\widetilde{E}| = |E|$ taki, że $f_i(x) \to f(x)$ dla każdego $x \in \widetilde{E}$.
2. Określmy zbiory $E_k^m = \{x \in \widetilde{E} : \forall_{i>k} |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\}$. Dla ustalonego m mamy $E_k^m \subset E_{k+1}^m$, a także

$$\forall_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{k>N} E_k^m = \widetilde{E}.$$

Stąd

$$\infty > |E| = |\widetilde{E}| = |E_k^m| + \sum_{i=k+1}^{\infty} |E_{i+i}^m \setminus E_i^m|.$$

Zatem

$$\forall_{m\in\mathbb{N}} \exists_{k_m} \sum_{i>k_m} |E_{i+1}^m \setminus E_i| < 2^{-m}.$$

(innymi słowy, $E_{k_m}^m \subset \widetilde{E}$ oraz $|\widetilde{E} \setminus E_{k_m}^m| < 2^{-m}$).
4. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{m=N}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-N+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Określmy zbiór $\widetilde{A_\varepsilon}$ za pomocą formuły

$$\widetilde{A_\varepsilon} = \bigcap_{m\geqslant N} E_{k_m}^m.$$

Wówczas

$$|\widetilde{E} \setminus \widetilde{A_\varepsilon}| < \sum_{m\geqslant N} |\widetilde{E} \setminus E_{k_m}^m| < \sum_{m\geqslant N} 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

5. Mamy $f_i \to f$ jednostajnie na $\widetilde{A_\varepsilon}$. Wybieramy $\delta > 0$, $m > \frac{1}{\delta}$

$$\forall_{j>k_m} \forall_{x\in\widetilde{A_\varepsilon}} |f_j(x) - f(x)| < \delta.$$

6. Poprawiamy $\widetilde{A_\varepsilon}$ biorąc $A_\varepsilon \subset \widetilde{A_\varepsilon}$ takie, że A_ε jest domknięte oraz $|\widetilde{E} \setminus A_\varepsilon| < \varepsilon$. □

Teraz możemy łatwo przeprowadzić dowód twierdzenia Łuzina.
Niech $f : E \mapsto \mathbb{R}$ będzie punktową granicą funkcji prostych $f_m = \sum_j \alpha_{j,m}\chi_{R_{j,m}}$. Dla każdego f_m wybierzmy otwarte otoczenie D_m ścian $R_{j,m}$ takie, że $|D_m| < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$. f_m jest lokalnie stała, więc jest ciągła na $E \setminus D_m = E_m$. Określmy $\widetilde{F_\varepsilon} = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$. Wówczas

$$|E \setminus \widetilde{F_\varepsilon}| < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wszystkie f_m są ciągłe na $\widetilde{F_\varepsilon}$ oraz f_m zbiega punktowo do f. Wybierzmy $\check{F}_\varepsilon \subset \widetilde{F_\varepsilon}$ takie, że $|E \setminus \check{F}_\varepsilon| < \frac{3}{3}\varepsilon$ i spełniające $f_m \to f$ jednostajnie na $\check{F}_\varepsilon$ (z twierdzenie Jegorowa). Stąd f jest ciągła na $\check{F}_\varepsilon$. Na koniec wybieramy domknięty podzbiór $F_\varepsilon \subset \check{F}_\varepsilon$ taki, że $|E \setminus F_\varepsilon| < \varepsilon$.
Przechodzimy teraz do zbieżności ciągów funkcji mierzalnych.

Twierdzenie 6. *Niech E będzie zbiorem mierzalnym o skończonej mierze, $f_m : E \mapsto \mathbb{R}$ spełnia*

$$\underset{x\in E}{\forall}\ \underset{m\in\mathbb{N}}{\forall} |f_m(x)| < M$$

oraz $f_m \to f$ prawie wszędzie na E. Wówczas

$$\int_E |f_m - f| \to 0 \textit{ przy } m \to \infty.$$

Dowód. Wybierzmy $A_\varepsilon \subset E$ takie, że $f_m \to f$ na A_ε jednostajnie

$$\int_E |f_m(x) - f(x)| dx = \int_{A_\varepsilon} |f_m - f| + \int_{E\setminus A_\varepsilon} |f_m - f| < (2M+1)\varepsilon.$$

□

Twierdzenie 7 (Lemat Fatou)**.** *Niech $f_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ będą mierzalne, $f_m \geqslant 0$ oraz $f_m(x) \to f(x)$ prawie wszędzie. Wówczas*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leqslant \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_m.$$

Dowód. Niech $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ będzie ograniczona, $|\text{supp} g| < \infty$, $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$. Jedna z definicji całki mówi, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} = \sup_g \int_{\mathbb{R}^n} g$$

Niech $g_m = \min(g, f_m)$ oraz $g_m \to g$ prawie wszędzie na $\mathbb{R}^n$. g_m są ograniczone, supp$g_m \subset$ g $= E$ Z twierdzenia o zbieżności ograniczonej

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_M = \int_E g_m \to \int_E g = \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Ponadto

$$\underset{m\in\mathbb{N}}{\forall} g_m(x) \leqslant f_m(x), \text{ co pociąga } \int_{\mathbb{R}^n} g_m \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f_m.$$

Dalej,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g = \liminf \int_{\mathbb{R}^n} g_m \leqslant \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_m,$$

czyli

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup_g \int_{\mathbb{R}^n} g \leqslant \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_m.$$

□

Twierdzenie 8 (O zbieżności monotonicznej)**.** *Niech $f_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f_m \nearrow f$ prawie wszędzie na $\mathbb{R}^n$, $f_m \geqslant 0$. Wówczas*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Dowód. Wystarczy zakładać, że $f_m \to f$ prawie wszędzie oraz $f_m(x) \leqslant f(x)$ prawie wszędzie.

$$\int f_M \leqslant \int f.$$

Stąd

$$\limsup \int f_m \leqslant \int_f, \ \liminf \int f_m \geqslant \int_f.$$

□

Wniosek 9 (Absolutna ciągłość całki)**.** *Niech f będzie całkowalna. Wówczas*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{\delta>0}{\exists} |E| < \delta \Rightarrow \left| \int_E f \right| < \varepsilon.$$

Dowód. Weźmy $f_N(x) = \min |f(x)|, N$. Wówczas $f_N \nearrow |f|$ przy $N \to \infty$ dla N dostatecznie dużych N

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|f| - f_N) < \frac{\varepsilon}{2}$$

z twierdzenia o zbieżności monotonicznej. Niech $\delta < \frac{\varepsilon}{2N}$, $|E| < \delta$. Wówczas

$$\left| \int_E f \right| \leqslant \int_E |f| = \int_E (|f| - f_N) + \int_E f_N \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (|f| - f_N) + N\delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 10 (O zbieżności zmajoryzowanej)**.** *Niech $f_m \to f$ zbiega prawie wszędzie na $\mathbb{R}^n$, f_m mierzalne oraz istnieje $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ takie, że*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g| < \infty \text{ oraz } |f_m(x)| \leqslant g(x) \text{ prawie wszędzie.}$$

Wówczas

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_m - f| \to 0.$$

Zaczniemy się obecnie zajmować przestrzeniami L^p.

Definicja 11. *Niech $E \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym oraz $p > 0$. Definiujemy zbiór $L^p(E)$ jako zbiór wszystkich funkcji mierzalnych określonych na E takich, że*

$$||f||_p = \left(\int_E |f(x)|^p dx < \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Wprost z nierówności $|x+y|^p \leqslant 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$ dla $p \geqslant 1$ oraz $x, y \in \mathbb{R}$ wynika, iż dla $p \geqslant 1$ $L^p(E)$ jest przestrzenią liniową. Widzimy jednak od razu, że jeśli f nie jest tożsamościowo równa 0, ale $f = 0$ prawie wszędzie, to $||f||_p = 0$, więc $L^p(E)$ nie może być w tej postaci przestrzenią unormowaną. Określamy zatem relację równoważności na $L^p(E)$ za pomocą warunku $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ prawie wszędzie i będziemy od tej pory utożsamiać $L^p(E)$ ze zbiorem klas abstrakcji tej relacji. Dla $p \geqslant 1$ zachodzi ponadto dobrze znana **Nierówność Minkowskiego**.

$$||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p \text{ dla } f, g \in L^p(E).$$

Jest więc $L^p(E)$ przestrzenią unormowaną.
Sytuacja zmienia się dla $p \in (0,1)$. Mamy wówczas **odwróconą nierówność Minkowskiego**

$$|||f| + |g|||_p \geqslant ||f||_p + ||g||_p \text{ dla } f, g \in L^p(E)$$

Tym nie mniej, zachodzi nierówność $||f+g||_p^p \leqslant ||f||_p^p + ||g||_p^p$, która pozwala wprowadzić metrykę na przestrzeni $L^p(E)$ dla $p \in (0,1)$ za pomocą wzoru

$$d_p(f,g) = \int_E |f(x) - g(x)|^p dx.$$

Jak już wiemy, dla $p \geqslant 1$ $L^p(E)$ jest przestrzenią unormowaną. Dążymy do wykazania, iż jest to przestrzeń Banacha (zupełna przestrzeń unormowana). Zacznijmy od pomocniczego lematu.

Lemat 12. *Przestrzeń unormowana V jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy absolutnie zbieżny szereg elementów z V jest zbieżny w V.*

Dowód. $\Rightarrow$ Załóżmy, że dla pewnych elementów $f_k \in V$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ jest absolutnie zbieżny, czyli szereg liczbowy } \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k|| \text{ jest zbieżny.}$$

Wówczas

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \sum_{k=N}^{\infty} ||f_k|| < \varepsilon.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Teraz, dla każdego $m > k > N$ otrzymujemy

$$||S_m - S_n|| = ||\sum_{k=n+1}^{m} f_k|| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k|| \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} ||f_k|| < \varepsilon.$$

Stąd S_n jest ciągiem Cauchy'ego w V. Ostatecznie, zupełność V implikuje jego zbieżność.
$\Leftarrow$ Załóżmy, że a_k jest ciągiem Cauchy'ego w V. Wówczas

$$\forall_k \exists_{m_k} \forall_{s,l>m_k} ||a_s - a_l|| \leqslant 2^{-k}.$$

Możemy oczywiście założyć, że $m_{k+1} > m_k$. Rozważmy ciąg b_k określony wzorami $b_1 = a_{m_1}$, $b_2 = a_{m_2} - a_{m_1}, \ldots, b_k = m_k - a_{m_{k-1}}$. Stąd

$$a_{m_l} = \sum_{k=1}^{l} b_k \text{ dla } k > 1 \text{ oraz } ||b_k|| < 2^{-k+1}.$$

Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest więc absolutnie zbieżny, czyli z założenia jest również zbieżny. Z definicji oznacza to również, iż ciąg a_{m_l} jest zbieżny. Niech S oznacza jego granicę. Z nierówności trójkąta możemy napisać

$$||a_k - S|| \leqslant ||a_k - a_{m_k}|| + ||a_{m_k} - S||.$$

Pierwsze wyrażenie jest dowolnie małe z warunku Cauchy'ego, drugie zaś ze zbieżności ciągu a_{m_k}. □

Możemy już udowodnić podstawowe twierdzenie.

Twierdzenie 13. *Przestrzeń $L_p(E)$ jest zupełna dla $p \geqslant 1$.*

Dowód. Niech $f_k \in L^p(E)$ będzie ciągiem spełniającym

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_p = M < \infty.$$

Wówczas ciąg g_m określony wzorem

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)|$$

jest ograniczony w $L^p(E)$, gdyż

$$||g_m||_p \leqslant \sum_{k=1}^{m} ||f_k||_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k|| = M < \infty.$$

Wynika stąd oczywiście również, że g_m jest skończone prawie wszędzie dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Ponadto, dla każdego $x \in E$ ciąg $|g_m(x)|$ jest niemalejącym ciągiem liczb dodatnich, więc jest zbieżny do pewnego $g(x) \in (0, \infty]$. W ten sposób określiliśmy funkcję $g : E \mapsto (0, \infty]$. Z twierdzenia o zbieżności monotonicznej dostajemy

$$||g||_p = \lim_{m\to\infty} ||g_m||_p \leqslant M.$$

Zatem $g \in L^p(E)$, a w szczególności g jest skończona prawie wszędzie. Wprost z definicji g otrzymujemy, iż

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \text{ jest zbieżny dla prawie wszystkich } x.$$

Oczywiście powyższe zdanie implikuje zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ dla prawie wszystkich } x.$$

Określmy funkcję $S : E \mapsto \mathbb{R}$ wzorem

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), & \text{jeśli } g(x) < \infty. \\ 0, & \text{jeśli } g(x) = \infty. \end{cases}$$

Musimy wykazać, że $S \in L^p(E)$ oraz S jest granicą szeregu

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(x) \text{ w } L^p(E).$$

Bez trudu uzyskujemy

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \right| \leqslant g_m(x) \leqslant g(x).$$

Przechodząc do granicy dostajemy

$$S(x) = \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| \leqslant g(x), \text{ a więc } ||S||_p \leqslant ||g||_p < \infty.$$

Ostateczcznie, oszacowanie

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - S(x) \right|^p \leqslant 2^p |g(x)|^p$$

pozwala zastosować twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, a więc

$$\sum_{k=1}^{m} f_k \to S \text{ w } L^p(E) \text{ dla } m \to \infty.$$

□

Następne ważne twierdzenie wiąże zbieżność w L^p ze zbieznoscą prawie wszędzie.

Twierdzenie 14. *Z każdego ciągu zbieżnego $f_m \in L^p(E)$ można wybrać podciąg zbieżny prawie wszędzie.*

Dowód. Załóżmy, że $p \in (1, \infty)$. Ciąg f_m spełnia warunek Cauchy'ego w $L^p(E)$, więc możemy wybrać podciąg f_{m_k} taki, że

$$||f_{m_{k+1}} - f_{m_k}||_p < 2^{-k}.$$

Wówczas

$$f_{m_l}(x) = f_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{l} (f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)).$$

Ostatni szereg jest zbieżny absolutnie zbieżny w $L^p(E)$, więc jest zbieżny, co kończy dowód. $\square$

Przechodzimy do kolejnego ważnego twierdzenia.

Twierdzenie 15 (O postaci funkcjonałów na $L^p(E)$)**.** *Dla* $p \in [1, \infty)$ *przestrzeń* $(L^p(E))^*$ *jest izometrycznie izomorficzna z* $L^q(E)$ *dla* $q = \frac{p}{p-1}$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Dowód tego twierdzenia jest dość wymagający, więc zanim przejdziemy do opisu jego schematu zastanówmy się jak wymieniony w twierdzeniu izomorfizm powinien wyglądać. Ustalmy $g \in L^q(E)$ i rozważmy funkcjonał liniowy $T_g : L^p(E) \mapsto \mathbb{R}$ określony wzorem

$$T_g(f) = \int_E fg.$$

Z nierówności Höldera otrzymujemy z łatwością, iż jest to funkcjonał ograniczony o normie nieprzekraczającej $||g||_q$. Co więcej, wykazemy, że

$$||T_g||_{(L^p(E))^*} = \sup_{||f||_p \leqslant 1} |T_g(f)| = ||g||_q.$$

Dla $p \in (1, \infty)$ weźmy $f = |g|^{q-1}\mathrm{sgn}g$. Wówczas $f \in L^p(E)$ oraz $||f||_p = ||g||_q^{\frac{q}{p}}$. Rozważając $\widetilde{f} = ||g||_q^{-\frac{q}{p}} f$ znajdujemy funkcję o normie 1 w $L^p(E)$ taką, że

$$T_g(\widetilde{f}) = \int \widetilde{f}g = ||g||_q^q \cdot ||g||_q^{-\frac{q}{p}} = ||g||_q.$$

Przedstawimy teraz obiecany schemat dowodu twierdzenia o postaci funkcjonałów na $L^p(E)$.

1. Bierzemy dowolny $T \in (L^p(E))^*$.

2. Dla zbiorów mierzalnych o skończonej mierze $A \subset E$ określamy funkcję $\lambda(A) = T(\chi_A)$.

3. Sprawdzamy, że λ jest miarą (ze znakiem).

4. Dowodzimy, iż jest to miara absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a, co przy pomocy twierdzenia Radona - Nikodyma daje

$$T(\chi_A) = \lambda(A) = \int_A g = \int_E g\chi_A \text{ dla pewnej funkcji } f \in L^1(E).$$

5. Z liniowości T wzór

$$T(f) = \int_E fg \text{ jest prawdziwy dla funkcji prostych } f.$$

6. Każda ograniczona funkcja jest jednostajną granicą ciągu funkcji prostych, więc powyższy wzór zachodzi dla $f \in L^\infty(E)$.

7. Obliczając wartość T na ciągu funkcji f_m zdefiniowanym wzorem

$$f_m = \mathrm{sgn} g \cdot |g|^{p-1} \chi_{\{|g| \leqslant m\}}$$

dowodzimy, że $g \in L^q(E)$.

8. Funkcjonały T oraz T_g są równe na gęstej podprzestrzeni $L^\infty(E) \cap L^p(E) \subset L^p(E)$, więc są równe.

Przechodzimy teraz do własności geometrycznych.

Definicja 16. *Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Powiemy, że X jest jednostajnie wypukła, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y \in X} ||x||, ||y|| \leqslant 1, \ ||x-y|| \geqslant \varepsilon \Rightarrow ||\frac{x+y}{2}|| \leqslant 1-\delta.$$

Udowodnimy teraz lemat.

Lemat 17. *Niech x_n będzie ciągiem elementów w przestrzeni jednostajnie wypukłej X. Jeśli $||x_n|| \leqslant q$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz zachodzi warunek*

$$\lim_{n,m\to\infty} ||x_n + x_m|| = 2,$$

to ciąg x_n jest ciągiem Cauchy'ego.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy δ z definicji jednostajnej wypukłości. Z założenia mamy

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n,m>n_0} ||\frac{x_n + x_m}{2}|| > 1-\delta.$$

Teraz definicja jednostajnej wypukłości daje $||x_n - x_m|| < \varepsilon$, czyli ciąg x_n jest ciągiem Cauchy'ego. □

Jednostajnej wypukłości dotyczą poniższe dwa ważne twierdzenia.

Twierdzenie 18. *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha. Jeśli x_n jest słabo zbieżny do pewnego x oraz*

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x||,$$

to ciąg x_n jest zbieżny.

Twierdzenie 19. *Przestrzenie L^p dla $p \in (1, \infty)$ są jednostajnie wypukłe.*

Do dowodu ostatniego twierdzenia potrzebne są **nierówności Clarksona**.

Lemat 20. *Dla $f, g \in L^p$ oraz $p \in [2, \infty)$ prawdziwa jest nierówność*

$$||f+g||_p^p + ||f-g||_p^p \leqslant 2^{p-1}(||f||_p^p + ||g||_p^p).$$

Dla $f, g \in L^p$ oraz $p \in (1, 2)$ prawdziwa jest nierówność

$$||f+g||_p^q + ||f-g||_p^q \leqslant 2(||f||_p^p + ||g||_p^p)^{q-1}, \text{ gdzie } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Korzystając z nierówności Clarksona udowodnimy teraz jednostajną wypukłość przestrzeni L^p. Załóżmy, że $p \geqslant 2$. Wówczas dla $||x||_p, ||y||_p \leqslant 1$ oraz $||f-g||_p \geqslant \varepsilon$ mamy

$$\begin{aligned} ||\frac{f+g}{2}||_p^p = 2^{-p}||f+g||_p^p \leqslant 2^{-p}(2^{p-1}(||f||_p^p + ||g||_p^p) - ||f-g||_p^p) \\ \leqslant 2^{-1} \cdot 2 - \frac{1}{2^p}\varepsilon^p = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \end{aligned}$$

Wystarczy wziąć $\delta = 1 - (1 - (\frac{\varepsilon}{2})^p)^{\frac{1}{p}}$. Podobnie, w drugim przypadku (dla $p \in (1, 2]$ można wziąć $\delta = 1 - (1 - (\frac{\varepsilon}{2})^q)^{\frac{1}{q}}$.

Lemat 21. *Niech T będzie ograniczonym funkcjonałem na pewnej przestrzeni unormowanej X. Załóżmy, że dla pewnych $f, g \in X$ mamy*

1. $||g|| = 1$, $T(g) = ||T||_{X^*}$
2. $$\lim_{t \to 0} \frac{||g+tf||^p - ||g||^p}{pt} = G \text{ istnieje dla pewnego } p \geqslant 1$$

Wówczas $T(f) = ||T|| \cdot G$

Dowód. Policzmy

$$\lim_{t \to 0} \frac{(T(g+tf))^p - T(g)^p}{pt} = \lim_{t \to 0} \frac{(T(g) + tT(f))^p - T(g)}{pt} = T(g)^{p-1}T(f).$$

Dalej, $||T|| \cdot ||g|| = T(g)$ oraz $||T|| \cdot ||g+tf|| \geqslant T(g+tf)$. Ponownie wykonujemy rachunek

$$\begin{aligned} ||T||^p \cdot G = \lim_{t \to 0^+} ||T||^p \frac{||g+tf||^p - ||g||^p}{pt} \geqslant \lim_{t \to 0^+} \frac{T(g+tf)^p - T(g)^p}{pt} = ||T||^{p-1}T(f) = \\ = \lim_{t \to 0^-} \frac{T(g+tf)^p - T(g)^p}{pt} = \lim_{t \to 0^-} ||T||^p \frac{||g+tf||^p - ||g||^p}{pt} = ||T||^p \cdot G. \end{aligned}$$

Wszędzie muszą więc zachodzić równości, co prowadzi do $T(f) = ||T|| \cdot G$. □

Plan dowodu dualności $L^p - L^q$.

1. Dla dowolnego $T \in (L^p)^*$ znaleźć $||g||_p = 1$, $T(g) = ||T||$.

2. Obliczyć granicę G

Weźmy ciąg $g_n \in L^p$, $||g_n||_p = 1$ taki, że $T(g_n) \to ||T|| \neq 0$ przy $n \to \infty$. Teraz

$$2 \geqslant ||g_n + g_m||_p \geqslant \frac{|T(g_n + g_m)|}{||T||} \to_{n,m\to\infty} 2.$$

Zatem $||g_n + g_m||_p \to 2$ przy $n, m \to \infty$, więc z lematu g_n jest ciągiem Cauchy'ego, czyli $g_n \to g \in L^p$, $||g||_p = 1$. Stąd oczywiście $T(g) = ||T||$. Do dowodu drugiej części potrzebujemy elementarnego wzoru

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}|a + bt|^p = p|a|^{p-1}b\mathrm{sgn}a.$$

Korzystając z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej liczymy

$$\lim_{t\to 0} \frac{||g + tf||_p^p - ||g||_p^p}{pt} = \lim_{t\to 0} \int_E \frac{|g + tf|^p - |g|^p}{pt} = \int_E |g|^{p-1} f \mathrm{sgn} g.$$

Stąd

$$T(f) = ||T|| \int f|g|^{p-1}\mathrm{sgn}g = T_h(f), \text{gdzie } h = ||T|| \cdot |g|^{p-1}\mathrm{sgn}g.$$

Przechodzimy teraz do pytań filozoficznych. Niech

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Kiedy $F'(x) = f(x)$ prawie wszędzie? Dla jakich funkcji różniczkowalnych prawie wszędzie zachodzi

$$F(x) = \int_a^x F'(t)dt.$$

Wiemy w ogólności, że tak nie jest, o czym świadczy znany przykład - **funkcja Cantora** $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ mającej własności $f(0) = 0$ oraz $f(1) = 1$, f' istnieje prawie wszędzie oraz $f' = 0$ dla prawie wszystkich x (tak naprawdę f jest rosnąca na zbiorze Cantora).
Przypomnijmy teraz znany lemat pokryciowy.

Definicja 22. *Rodzinę $\mathfrak{B}$ kul w $\mathbb{R}^n$ nazywamy pokryciem Vitaliego zbioru E, jeżeli*

1. $E \subset \bigcup \mathfrak{B}$

2.
$$\forall_{x\in E} \inf\{\mathrm{diam}B : B \in \mathfrak{B},\ x \in B\} = 0$$

Lemat 23 (Lemat Vitaliego)**.** *Niech E będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$ o skończonej mierze zewnętrznej i niech $\mathfrak{B}$ będzie pokryciem Viatliego zbioru E. Wówczas z $\mathfrak{B}$ można wybrać przeliczalną rodzinę rozłącznych kul $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ taką, że*

$$\mu^*(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0 \ \textit{oraz} \ \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right| < \infty.$$

Twierdzenie 24. *Każda $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ niemalejąca jest różniczkowalna prawie wszędzie oraz*

$$\underset{a<b}{\forall} \int_a^b f'(x)dx \leqslant f(b) - f(a).$$

Dowód. Dla $x \in \mathbb{R}$ określamy górną i dolną **pochodną Diniego**

$$D^{\pm}f(x) = \limsup_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, D_{\pm}f(x) = \liminf_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Oczywiście $D^+f(x) \geqslant D_+f(x)$, $D^-f(x) \geqslant D_-f(x)$. Wykażemy, że $D_+f(x) \geqslant D^-f(x)$ dla prawie wszystkich x oraz $D_-f(x) \geqslant D^+f(x)$ dla prawie wszystkich x. Zdefiniujmy zbiór

$$A^N_{\alpha,\beta} = \{x \in (-N, N) : D_+f(x) < \beta < \alpha < D^*f(x)\}.$$

Niech $U \supset A^N_{\alpha,\beta}$ taki, że $|U| \leqslant \mu^*(A^N_{\alpha,\beta}) + \varepsilon$. Weźmy rodzinę odcinków $[a, b]$ (to będzie nasza rodzina $\mathfrak{B}$) w U takich, że $f(b) - f(a) < \beta(b - a)$. Z definicji, dla każdego $x \in A^N_{\alpha,\beta}$ mamy

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \beta.$$

Istnieją krótkie odcinki $[x, x+h]$ takie, że $f(x+h)-f(x) < \beta h$, więc rodzina $\mathfrak{B}$ jest pokryciem Vitaliego zbioru $A^N_{\alpha,\beta}$. Wybierzmy skończoną rodzinę rozłącznych odcinków I_i, $i = 1, 2, \ldots, K$, $I_i = [a_i, b_i]$, $f(b_i) - f(a_i) \leqslant \beta(b_i - a_i)$ taką, że

$$\mu^*(A^N_{\alpha,\beta} \setminus \bigcup_i I_i) < \varepsilon.$$

Mamy proste oszacowanie

$$\sum_{i=1}^{K}(f(b_i) - f(a_i)) \leqslant \beta \sum_{i=1}^{K}(b_i - a_i) < \beta[\mu^*(A^N_{\alpha,\beta}) + \varepsilon].$$

Patrzymy na $I_i \cap A^N_{\alpha,\beta}$. Odcinki postaci $[c, d]$ zawarte w I_i takie, że $f(d)-f(c) > \alpha(d - c)$ tworzą pokrycie Vitaliego $I_i \cap A^N_{\alpha,\beta}$. Wybieramy teraz $J_1, J_2 \ldots, J_{k_i}$, $J_j = [c_j, d_j]$ spełniające

$$\mu^*(I_i \cap A^N_{\alpha,\beta} \setminus \bigcup_{j=1}^{k_i} J_j) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Ponadto,

$$\sum_{j=1}^{k_i}(f(d_j) - f(c_j)) \leqslant f(b_i) - f(a_i).$$

Stąd,

$$(\mu^*(A^N_{\alpha,\beta}) + \varepsilon)\beta \geqslant \sum_{i=1}^{K}(f(b_i) - f(a_i)) \geqslant \sum_{i=1}^{K}\sum_{J_j \subset I_i}(f(d_j) - f(c_j)) \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{K}\sum_{J_j = I_i}|J_j|$$

$$\geqslant \alpha \sum_{i=1}^{K}\left[\mu^*(A^N_{\alpha,\beta} \cap I_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}\right] \geqslant \alpha\left[\mu^*(A^N_{\alpha,\beta} \cap \bigcup_i I_i) - \varepsilon\right] \geqslant \alpha\left[\mu^*(A^N_{\alpha,\beta}) - 2\varepsilon\right].$$

Z założenia jednak $\alpha > \beta$, czyli $\mu^*(A^N_{\alpha,\beta}) = 0$. Dla dowodu drugiej części rozważmy $\widetilde{f}$ określone jako $\widetilde{f}(x) = f(x)$ dla $x \in [a,b]$ oraz $\widetilde{f}(x) = f(b)$ dla $x > b$. Rozważmy ciąg $g_n(x) = n\left[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right] \geqslant 0$. Wówczas $g_n \to f'$ punktowo prawie wszędzie przy $n \to \infty$. Dalej, z lematu Fatou

$$\int_a^b f'(t)dt = \int_a^b \widetilde{f}'(t)dt \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(t)dt = \liminf_{n\to\infty} n\int_a^b (\widetilde{f}(t+\frac{1}{n}) - \widetilde{f}(t))dt =$$

$$\liminf_{n\to\infty} n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b}\widetilde{f} + \int_a^{b+\frac{1}{n}}\widetilde{f} - \int_a^{a+\frac{1}{n}}\widetilde{f} - \int_{a+\frac{1}{n}}^{b}\widetilde{f}\right] \leqslant \liminf_{n\to\infty}(f(b) - f(a)) = f(b) - f(a).$$

□

Przechodzimy do funkcji o wahaniu ograniczonym.

Definicja 25. *Niech $\nu : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ będzie podziałem odcinka. Niech f będzie funkcją określoną na $[a,b]$. Wprowadzamy oznaczenia*

$$p_\nu(f) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$$

$$\eta_\nu(f) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]^-$$

$$t_\nu(f) = \sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$p_\nu(f) + \eta_\nu(f) = t_\nu(f)$$

$$p_\nu(f) - \eta_\nu(f) = f(b) - f(a)$$

$$P^b_a(f) = \sup_\nu p_\nu(f)$$

$$N^n_a = \sup_\nu \eta_\nu(f)$$

$$T^b_a = \sup_\nu t_\nu(f)$$

Mówimy, że $f \in BV([a,b])$, gdy $T^b_a(f) < \infty$.

Można sprawdzić, że $T_a^b(f) = P_a^b(f) + N_a^b(f)$, $P_a^b - N_a^b = f(b) - f(a)$.

Wniosek 26. *$f \in BV([a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnicą dwóch funkcji niemalejących.*

Dowód. W jedną stronę to jasne, bo $f(x) = f(a) + P_a^x(f) - N_a^x(f)$. Jeśli $f(x) = g(x) - h(x)$ są niemalejące, to

$$t_\nu(f) = \sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \sum_i)(|g(x_i) - g(x_{i-1})| + |h(x_i) - h(x_{i-1})| = g(b) - g(a) + h(b) - h(a).$$

Stąd $T_a^b(f) \leqslant g(b) - g(a) + h(b) - h(a)$. □

Wniosek 27. *Funkcje o wahaniu skończonym są różniczkowalne prawie wszędzie.*

Twierdzenie 28. *Niech $f \in L^1([a,b])$ oraz*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Wówczas

1. *$F \in C([a,b]) \cap BV([a,b])$*
2. *$F' = f$ prawie wszędzie.*

Dowód. Ciągłość F wynika z absolutnej ciągłości całki. Całkowite wahanie F łatwo ograniczyć przez $||f||_{L^1([a,b])}$. W dalszej części potrzebujemy następującego faktu:
jeśli $f \in L^1([a,b])$ i dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi

$$\int_a^x f(t)dt = 0,$$

to $f(x) = 0$ prawie wszędzie. Dalej, bez straty ogólności możemy założyć, że $f \geqslant 0$ na $[a,b]$. Przyjmijmy na początek, iż f jest ograniczona na $[a,b]$. Określmy ciąg

$$f_n(x) = n(F(x + \frac{1}{n}) - F(x)).$$

Wówczas f_n jest ograniczonym ciągiem na $[a,b]$ oraz $f_n \to F'$ prawie wszędzie. Zatem z twierdzenia o zbieżności ograniczonej

$$\underset{c \in [a,b)}{\forall} \int_a^c F' = \int_a^c \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n = F(c) - F(a) = \int_a^c f.$$

Stąd

$$\underset{c \in [a,b)}{\forall} \int_a^c (F' - f) = 0 \Rightarrow F' = g \text{ prawie wszędzie.}$$

Dla f nieograniczonej określamy $f_n = \min(f, n)$. Wówczas

$$G_n(x) = \int_a^x (f - f_n)$$

jest niemalejąca, więc różniczkowalna prawie wszędzie, $G_n'(x) \geqslant 0$.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\int_a^x (f - f_n) + \frac{d}{dx}\int_a^x f_n = G'(x) + \frac{d}{dx}\int_a^x f_n \geqslant \frac{d}{dx}\int_a^x f_n = f_n(x).$$

Stąd $F'(x) \geqslant f(x)$ dla prawie wszystkich x. Zatem

$$\forall_{c \in [a,b)} \int_a^c F' \geqslant \int_a^c f = F(c) - F(a).$$

Jednakże, $f \geqslant 0$, czyli F jest niemalejąca, a stąd

$$\int_a^c F' \leqslant F(c) - F(a) \Rightarrow \int_a^c F'(t)dt = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt.$$

Zatem

$$\forall_{c \in [a,b)} \int_a^c (F' - f) = 0 \Rightarrow F' = f \text{ prawie wszędzie w } [a, b].$$

□

Definicja 29. *Powiemy, że $f \in AC([a, b])$, jeśli*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \sum |I_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon,$$

gdzie $I_i = \{[x_i, y_i]\}_{i=1}^k$.

Uwaga 30. *Jeśli $f \in L^1([a, b])$, to*

$$\int_a^x f(t)dt \in AC.$$

Ćwiczenie 31. *1. Jeśli $f \in AC$, to $f \in BV$.*

2. Czy jeśli $f \in C([a, b]) \cap BV([a, b])$, to $f \in AC([a, b])$?.

Twierdzenie 32 (Charakteryzacja funkcji absolutnie ciągłych)**.** *$F \in AC([a, b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $f \in L^1([a, b])$ takie, że*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Dowód. Będziemy potrzebować następującego faktu: jeśli $f \in AC([a,b])$ oraz $f' = 0$ prawie wszędzie, to f jest stała.
$\Rightarrow$ Niech $F \in AC$. Wówczas z ćwiczenia $F \in BV$, czyli istnieją F_1, F_2 - funkcje niemalejące takie, że $F = F_1 - F_2$. Mamy $|F'(x)| \leqslant |F_1'(x)| + |F_2'(x)|$. Zatem

$$\int_a^b |F'(x)| \leqslant \int_a^b F_1' + \int_a^b F_2 \leqslant F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a) < \infty.$$

Stąd $F' \in L^1([a,b])$, dalej

$$G(x) = \int_a^x F'(t)dt \in AC,$$

więc $F - G \in AC$. Dostajemy $(F-G)' = 0$ prawie wszędzie. Z faktu otrzymujemy $F - G$ jest stałe. Stąd $F(a) - G(a) = F(a)$, bo $G(a) = 0$, czyli

$$F(x) = G(x) + F(a) = \int_a^x F'(t)dt + F(a).$$

□

W przyszłości będziemy używać także klasy $ACL_p(\mathbb{R}^n)$ funkcji z $L^p(\mathbb{R}^n)$, które ograniczone do prawie wszystkich prostych równoległych do osi są absolutnie ciągłe.
Przechodzimy do teorii dystrybucji. Wprowadzimy najpierw klasę funkcji testujących.

Definicja 33. *Niech $K \subset\subset \mathbb{R}^n$. Określmy*

$$\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \mathrm{supp} f \subset K\}.$$

Określamy klasę ***funkcji testujących*** *jako*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{D}_K.$$

W rzeczywistości zawsze można wziąć przeliczalny ciąg wstępujący zbiorów zwartych wypełniający Ω.

Będziemy się starać określić topologię na $\mathcal{D}(\Omega)$. Określamy zbieżność ciągów w $\mathcal{D}_K$

$$\varphi_m \to \phi \text{ w } \mathcal{D}_K, \text{ gdy } \forall_\alpha D^\alpha \varphi_m \rightrightarrows D^\alpha \varphi.$$

Możemy określić metrykę w $\mathcal{D}_K$ za pomocą wzoru

$$d(f,g) = \sum_{N=0}^\infty \frac{||f-g||_N}{1 + ||f-g||_N} 2^{-N},$$

gdzie

$$||f||_N = \sup_{\mathbb{R}^n} \{|D^\alpha f| : |\alpha| \leqslant N\}.$$

W ten sposób dostajemy przestrzeń Frecheta.
Przechodzimy teraz do przypadku ogólnego. Moglibyśmy określić topologię na $\mathcal{D}(\Omega)$ tak samo jak na $\mathcal{D}_K$ biorąc wstępującą rodzinę zbiorów zwartych, które wypełniają Ω. Niestety, otrzymana przestrzeń z analogicznie zadaną metryką nie będzie zupełna.
Inny pomysł jest taki: wziąć najsilniejszą topologię na $D(\Omega)$ taką, że włożenia $\mathcal{D}_{K_i} \hookrightarrow D(\Omega)$ są ciągłe. Przyda nam się jednak również bezpośredni opis zbieżności ciągu w $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definicja 34. *Powiemy, że ciąg $\varphi_m \in \mathcal{D}(\Omega)$ jest zbieżny do $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące dwa warunki*

1.
$$\underset{K \subset\subset \Omega}{\exists} \underset{m}{\forall} \operatorname{supp}\varphi_m \subset K$$

2. $\varphi_m \to \varphi$ w $\mathcal{D}_K$.

Ta topologia nie jest metryzowalna, ale jest zupełna.
Przechodzimy do pojęcia dystrybucji

Definicja 35. *Dystrybucją na Ω nazywamy ciągły funkcjonał na $\mathcal{D}(\Omega)$. Przestrzeń dystrybucji będziemy oznaczać przez $\mathcal{D}'(\Omega)$. Powiemy, że $S_k \to S$ w $\mathcal{D}'(\Omega)$, gdy*
$$\underset{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}{\forall} < S_k, \varphi > \to < S, \varphi >$$

Twierdzenie 36. *Funkcjonał liniowy na $\mathcal{D}(\Omega)$ jest dystrybucją wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$\underset{K \subset\subset \Omega}{\forall} \underset{N \in \mathbb{N} \cup \{0\}}{\exists} \underset{C > 0}{\exists} \underset{\varphi \in \mathcal{D}_K}{\forall} | < S, \varphi > | \leqslant C ||\varphi||_N.$$

Ćwiczenie 37. *Znaleźć funkcjonał liniowy na $\mathcal{D}(\Omega)$, który nie jest dystrybucją.*

Definicja 38. *Jeśli istnieje N wspólne dla wszystkich K w powyższej definicji, to nazywamy je rzędem dystrybucji. W przeciwnym wypadku mówimy, że dystrybucja ma rząd nieskończony.*

Czas na kilka przykładów.

1. Jeśli $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, to mamy dystrybucję regularną T_f
$$< T_f, \varphi > = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi.$$

2. Dla $x \in \Omega$ $< \delta_x, \varphi > = \varphi(x)$.

3. Dla μ dowolnej miary Radona możemy zdefiniować dystrybucję T_μ
$$< T_\mu, \varphi > = \int_\Omega \varphi d\mu.$$

4. $<\delta'_x, \varphi> = -\varphi'(x)$.
5. Dla dowolnego ciągu (x_k), który nie ma punktów skupienia w Ω możemy określić
$$<T, \varphi> = \sum_k \varphi(k)(x_k).$$

Przechodzimy do operacji na dystrybucjach.

Definicja 39. *Jeśli $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ jest gładka oraz $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, to określamy iloczyn funkcji f i dystrybucji T jako dystrybucję Tf zadaną wzorem*

$$<Tf, \varphi> := <T, f\varphi> \quad \text{dla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Spróbujmy dla przykładu znaleźć rozwiązania równania $x \cdot T = 0$ $(T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$. Zaczniemy w tym celu od lematu.

Lemat 40. *Ustalmy $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi(0) = 1$. Wówczas dla każdego $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ istnieje $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ taka, że*

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \varphi(x) = \varphi(0)\psi(x) + x\widetilde{\varphi}(x).$$

Dowód. Weźmy $\alpha(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\psi(x)$. Oczywiście $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ oraz $\alpha(0) = 0$. Napiszmy wzór Taylora z resztą w postaci całki

$$\alpha(x) = \alpha(0) + x\alpha'(0) + \int_0^x \frac{\alpha''(t)}{2}(x-t)dt = x\alpha'(0) + x\int_0^1 \frac{\alpha''(sx)}{2}(1-s)ds =$$
$$= x[\alpha'(0) + \frac{x}{2}\int_0^1 \alpha''(sx)(1-s)dx] = x\widetilde{\varphi}(x).$$

Wówczas $\widetilde{\varphi}$ spełnia tezę, więc ma także zwarty nośnik (gładkość jest jasna). $\square$

Powróćmy do naszego równania. Dla ustalonego ψ z lematu przyjmijmy $C = <T, \psi>$. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mamy

$$<T, \varphi> = <T, \varphi(0)\psi + x\widetilde{\varphi}> = \varphi(0) <T, \psi> + <T, x\widetilde{\varphi}> = C\varphi(0) = <C\delta_0, \varphi>.$$

Zatem $T = C\delta_0$. Zajmijmy się teraz problemem ogólnym sformułowanym przez Laurenta Schwartza z 1951 roku.
Czy dla ustalonego wielomianu P i $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ istnieje $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ takie, że $T = PS$. Odpowiedź jest pozytywna i pochodzi od Łojasiewicza (nawet dla dowolnych P - funkcji analitycznych) oraz niezależnie Hörmandera.
Kolejną ważną operacją na dystrybucjach jest różniczkowanie.

Definicja 41. *Dla ustalonego wielowskaźnika α wprowadzamy pochodną $D^\alpha T$ dystrybucji T jako dystrybucję*

$$<D^\alpha T, \varphi> = (-1)^{|\alpha|} <T, D^\alpha\varphi> \quad \text{dla } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Widzimy łatwo, że odpowiada to całkowaniu przez części dla dystrybucji regularnych.
Typowym przykładem jest różniczkowanie funkcji Heaviside'a, czyli $H(x) = 0$ dla $x \leqslant 0$ oraz $H(x) = 1$ dla $x > 0$. Wówczas $H'(x) = \delta 0$. Ponadto, zachodzi dobrze znana reguła Leibnitza

$$D^i(f \cdot T) = D^i f \cdot T + f \cdot D^i T \text{ dla } f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Określamy również operator przesunięcia $\tau_h : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wzorem $\tau_h f(x) = f(x - h)$. Mamy również wzór

$$< \tau_h T, \varphi >=< T, \tau_{-h}\varphi > \text{ dla } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Czas na splot. Oznaczmy $\check{u}(x) = u(-x)$. Przez analogię ze splotem dwóch funkcji określamy splot $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ z $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wzorem

$$T * \varphi(x) =< T, \lambda_x \check{\varphi} >=< \lambda_{-x} T, \check{\varphi} > .$$

Zachodzą intuicyjne własności splotu dla $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

1. $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. $D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T * \varphi) = T * D^\alpha \varphi$.
3. $\tau_h(T * \varphi) = \tau_h T * \varphi = T * \lambda_h \varphi$.
4. Dla $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mamy $T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi$.

Zmierzamy do wygładzania. Wprowadźmy dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geqslant 0$ o całce równej 1 oznaczanie $\varphi_m(x) = m^n \varphi(mx)$ (całka pozostaje 1). Czas na prosty fakt.

Fakt 42. *Dla $f \in C(\mathbb{R}^n)$ oraz $f * \varphi_m \rightrightarrows f$ dla każdego zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Niech teraz $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Sprawdzimy, że zachodzi $f * \varphi_m \to f$ w $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Widzimy łatwo, iż ciąg $f * \varphi_m$ ma nośnik zawarty w pewnym zbiorze zwartym $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, bo

$$\mathrm{supp}(f * \varphi_m) \subset \mathrm{supp}(f * \varphi) \subset \mathrm{supp} f + \mathrm{supp}\varphi.$$

Ponadto, z faktu

$$D^\alpha(f * \varphi_m) = D^\alpha f * \varphi_m \rightrightarrows D^\alpha f \text{ dla zbiorów zwartych.}$$

Możemy udowodnić twierdzenie.

Twierdzenie 43. *Zbiór $\{T_f : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ jest gęsty w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Dowód. Weźmy $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ oraz $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wówczas

$$\begin{aligned} < T, \psi >=< T, (\check{psi}) >= (T * \check{psi})(0) &= \lim_{m\to\infty} (T * \check{psi}) * \varphi_m(0) \\ = \lim_{m\to\infty} T * (\check{\psi} * \varphi_m)(0) &= \lim_{m\to\infty} (T * \varphi_m) * \check{\psi}(0) = \\ &= \lim_{m\to\infty} < T_{T*\varphi_m}, \psi > . \end{aligned}$$

□

Prosty przykład różniczkowania pokazuje $< \delta_0', \varphi >= -\varphi'(0)$. Można się zastanowić, jak wygląda ciąg funkcji gładkich zbieżnych do δ_0'. Wprowadźmy definicję.

Definicja 44. *Powiemy, że $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ znika na zbiorze otwartym $V \subset \Omega$, gdy $< T, \varphi >= 0$ dla każdego φ takiego, że $\mathrm{supp}\varphi \subset V$. Określamy nośnik dystrybucji T za pomocą formuły*

$$\mathrm{supp}T = \bigcap \{\Omega \setminus V : \ T \ \textit{znika na } V\}.$$

Wypada podać dwa klasyczne ćwiczenia.

Ćwiczenie 45. *Udowodnić, że jeśli $\Lambda : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mapsto C^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest takie, że dla dowolnego α mamy $D^\alpha \Lambda = \Lambda D^\alpha$, to istnieje $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ spełniające*

$$\Lambda\varphi = T * \varphi \ \textit{dla } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Ćwiczenie 46. *Załóżmy, że T ma zwarty nośnik. Sprawdzić, iż wówczas dla każdego $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $T * \varphi$ ma zwarty nośnik.*

W myśl tego ćwiczenia możemy podać definicję splotu dystrybucji.

Definicja 47. *Jeśli jedna z dystrybucji S, T ma zwarty nośnik to określamy ich splot wzorem*

$$< S * T, \varphi >=< S, T * \varphi > \ \ \textit{dla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Łatwo sprawdzić, że dla $S \in \mathcal{D}'$ zachodzi $S * \delta = S$. Nareszcie możemy zdefiniować przestrzenie Sobolewa.

Definicja 48. *Przestrzeń Sobolewa $W^{k,p}(\Omega)$ to zbiór wszystkich dystrybucji $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, których wszystkie pochodne do rzędu k są funkcjami z $L^p(\Omega)$.*

Oczywiście, w powyższej definicji utożsamiamy dystrybucje regularne z funkcjami.

Fakt 49. *Rozwiązanie fundamentalne Γ równania $\triangle^k \Gamma = \delta_0$ jest postaci*

$$\Gamma(x) = c_{n,k}(-1)^k |x|^{2k-n} \ \textit{dla } k \in \mathbb{N},\ n \in 2\mathbb{N}+1 \ \textit{lub dla } k < \frac{n}{2} \ \textit{i } n \in 2\mathbb{N}$$

$$\Gamma(x) = c_{n,k}(-1)^{k-1} |x|^{2k-n} \ln|x| \ \textit{dla } k \leqslant \frac{n}{2},\ n \in 2\mathbb{N}.$$

Twierdzenie 50. *Niech $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ będzie takie, że dla każdego α spełniającego $|\alpha| = k$ mamy $D^\alpha T \in L^p(\Omega)$. Wówczas $T \in L^p_{loc}(\Omega)$.*

Dowód. Weźmy $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ o własności $\varphi =\equiv 1$ oraz $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ spełnia $\eta \equiv 1$ na pewnym otoczeniu zera (rysunek: jest duża Ω, w środku mniejsze V i najmniejsze pewne otoczenie zera), $\mathrm{supp}\eta \subset B(0, \varepsilon)$. Przyjmijmy $S = \varphi \cdot T$ Mamy

$$\triangle^k \Gamma = \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha D^\alpha \Gamma.$$

A także $D^\alpha \Gamma \in L^1_{loc}$ dla $|\alpha| \leqslant k$. Prostym rachunkiem sprawdzimy, iż

$$\triangle^k(\eta\Gamma) = \xi + \delta_0 \ \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Zatem

$$S * \triangle^k(\eta\Gamma) = S * (\xi + \delta_0) = S * \xi + S.$$

Z drugiej strony,

$$S * \triangle^k(\eta\Gamma) = S * \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha D^\alpha(\eta\Gamma) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha D^\alpha S * D^\alpha(\eta\Gamma).$$

Stąd w V zachodzi $D^\alpha S = D^\alpha(\varphi T) = \varphi D^\alpha T$. Zaś na pewnym otoczeniu zera mamy

$$D^\alpha(\eta\Gamma) * D^\alpha S = D^\alpha(\eta\Gamma) * \varphi D^\alpha T \in Lp(U)$$

□

Wprowadzimy jeszcze definicje

$$BL^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : D^\alpha f \in L^p \text{ dla } |\alpha| = k\}.$$

oraz $\dot{W}^{k,p}(\Omega) = BL^{k,p}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Definicja 51. *Wprowadzane przestrzenie rozpatrujemy z poniższymi normami*

$$||u||_{W^{k,p}} = \sum_{|\beta|\leqslant k} ||D^\beta u||_{L^p}$$

$$||u||_{\dot{W}^{k,p}} = ||u||_{L^p} + \sum_{|\alpha|=k} ||D^\alpha u||_{L^p}$$

$$||u||_{BL^{k,p}} = \sum_{|\alpha|=k} ||D^\alpha u||_{L^p} \text{ tu dzielimy przestrzeń przez wielomiany.}$$

Omówimy teraz przedstawienie całkowe funkcji z przestrzeni Sobolewa.

Twierdzenie 52. *Dla każdego $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ zachodzi*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{< \nabla u(y), x - y >}{|x-y|^n} dy,$$

gdzie ω_n to miara kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$.

Dowód. Ustalmy $s \in S^{n-1}(0,1)$. Wówczas

$$u(x) = -\int_0^\infty \frac{d}{dt} u(x+ts)dt = -\int_0^\infty < \nabla u(x+ts), s > dt =$$

$$-\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty < \nabla u(x+ts), s > dtds = -\frac{1}{n\omega_n} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{< \nabla u(x+ts), s >}{t^{n-1}} t^{n-1} dsdt =$$

$$= -\frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{< \nabla u(y), \frac{y-x}{|x-y|} >}{|x-y|^{n-1}} dy = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{< \nabla u(y), x-y >}{|x-y|^n}.$$

□

Wniosek 53. *Zachodzi nierówność*

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

Po prawej stronie widzimy operator Riesza

$$(I_\alpha f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Twierdzenie 54. *Istnieje stała $C = C(n)$ taka, że dla każdej kuli $B \subset \mathbb{R}^n$ i $u \in W^{1,p}(B)$ mamy*

$$|u(x) - u_B| \leqslant C(n) \int B \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \text{ prawie wszędzie w } B,$$

gdzie u_B oznacza całkę średnią

$$u_B = \frac{1}{|B|} \int_B u(y) dy.$$

Dowód. Załóżmy, że $u \in C^\infty(B)$ i ustalmy $x \in B$. Dla $y \in B$, $y \neq x$ możemy napisać

$$y = x + t\frac{y-x}{|y-x|} = x + t\lambda \text{ dla pewnego } \lambda \in S^{n-1}.$$

Niech $\delta(\lambda) = \max\{t > 0 : x + t\lambda \in B\}$. Teraz mamy

$$u(x) - u(y) = \int_0^{|y-x|} \frac{d}{ds} u(x+s\lambda) ds = \int_0^{|y-x|} < \nabla u(x+s\lambda), \lambda > ds.$$

Zatem

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \int 0^{|y-x|} |\nabla u(x+s\lambda)| ds \leqslant \int_0^{\delta(\lambda)} |\nabla u(x+s\lambda)| ds.$$

Możemy już teraz szacować potrzebne wyrażenie

$$|u(x) - u_B| = \left| \fint_B (u(x) - u(y)) dy \right| \leqslant \fint_B |u(x) - u(y)| dy \leqslant \frac{1}{|B|} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(y)| \chi_B(y) dy = \frac{1}{|B|} \int_0^\infty t^{n-1} \int_{S^{n-}}$$

To kończy dowód dla funkcji gładkich. □

Aby zakończyć dowód w przypadku ogólnym potrzebny jest poniższy fakt.

Fakt 55. *Funkcje $C^\infty(\Omega)$ są gęste w $W^{1,p}(\Omega)$ (także w $BL^{1,p}(\Omega)$) dla każdego otwartego zbioru Ω.*

Teraz weźmy $u \in W^{1,p}(B)$. Wówczas $u \in L^1(B)$ oraz $\nabla u \in L^1(B)$. Załóżmy, że

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u \text{ w } W^{1,p}(B), \text{ gdzie } u_k \in C^\infty(B).$$

Z definicji $u_k \to u$ oraz $\nabla u_k \to \nabla u$ w L^1. Ponadto, $(u_k)_B \to u_B$, co daje $u_k-(u_k)_B \to u-u_B$ w L^1. Wybierając podciąg zbieżny prawie wszędzie możemy zakładać, że $u_k - (u_k)_B \to u - u_B$ prawie wszędzie w B. Zdefiniujmy lokalny operator Riesza wzorem

$$I_\alpha^\Omega \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

Widzimy, że prawa strona wynosi $C(n)I_1^B(|\nabla u|)(x)$. Sprawdzimy, że operator I_1^B jest ciągły w $L^1(B)$.

$$||I_1^B g||_{L^1(B)} = \int_B \left| \int_B \frac{g(y)}{|x-y|^{n-1}} dy \right| dx \leqslant$$

$$\int_B \int_B \frac{|g(y)|}{|x-y|^{n-1}} dx dy \leqslant \int_B |g(y)| \int_B \frac{dx}{|x-y|^{n-1}} dy \leqslant C(n)|B|^{\frac{1}{n}} ||g||_{L^1(B)}.$$

Korzystając z tego faktu łatwo dowodzimy tezę (ciągi zbieżne przechodzą na zbieżne i na wybieramy jeszcze podciąg zbieżny prawie wszędzie).

Ćwiczenie 56. *Niech Ω będzie zbiorem ograniczonym, otwartym i wypukłym oraz $S \subset \Omega$ jest mierzalny i $|S| > 0$. Wówczas dla każdego $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Wówczas*

$$|u(x) - u_S| \leqslant \frac{(\mathrm{diam}\Omega)^n}{n|S|} \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

Definicja 57. *Zbiór Ω jest gwiaździsty względem $x \in \Omega$, jeśli dla każdy promień wychodzący z x przecina $\partial\Omega$ w dokładnie jednym punkcie. Podobnie, Ω jest gwiaździsty względem podzbioru $E \subset \Omega$ wtedy i tylko wtedy, Ω jest gwiaździsty względem dowolnego $x \in E$.*

Ćwiczenie 58. *Udowodnić, że jeśli Ω jest gwiaździsty względem $B \subset \Omega$, to dla każdego $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ zachodzi*

$$|u(x) - u_B|| \leqslant C(n) \frac{(\mathrm{diam}\Omega)^n}{|B|} \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

Wniosek 59 (Nierówność Poincare dla kuli)**.** *Dla każdego $B = B(x_0, r)$ i $u \in W^{1,p}(B)$, $1 \leqslant p < \infty$ zachodzi*

$$\left(\fint_B |u - u_B|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(n,p) r \left(\fint_B |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dowód. Z wcześniejszych wyników mamy

$$|u(x) - u_B| \leqslant C(n) I_1^B(|\nabla u|)(x).$$

Całkujemy i szacując operator Riesza z nierówności $||I_1^B(g)||_p^p \leqslant C(n,p)|B|^{\frac{p}{n}} ||g||_p^p$ otrzymujemy

$$\fint_B |u(x) - u_B|^p \leqslant C^p \fint_B I_1^B(|\nabla u|)(x)^p \leqslant C(n,p)|B|^{\frac{p}{n}} \fint_B |\nabla u|^p,$$

co kończy dowód (trzeba spierwiastkować i zamienić stałą). □

Jeszcze dwa słowa o ogólniejszych wersjach nierówności Poincare.

Twierdzenie 60. *Niech Ω będzie otwarte, ograniczone, wypukłe, środkowosymetryczne. Wówczas dla $u \in W^{1,p}(\Omega)$ i $1 \leqslant p \leqslant \infty$ i mierzalnego podzbioru $S \subset \Omega$, $|S| > 0$ zachodzi*

$$\int_\Omega |u - u_S|^p \leqslant 2^n (\mathrm{diam}\Omega)^p \frac{|\Omega|}{|S|} \int_\Omega |\nabla u|^p.$$

Inna wersja nierówności Poincare.

Twierdzenie 61. *Niech Ω będzie zbiorem ograniczonym, otwartym i wypukłym, środkowosymetrycznym.*

Załóżmy, że $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. Wówczas dla każdego mierzalnego $S \subset \Omega$, $|S| > 0$ zachodzi

$$||u - u_S||^p_{L^p(\Omega)} \leqslant 2^n (\mathrm{diam}\Omega)^p \frac{|\Omega|}{|S|} ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)}.$$

Dowód. Wystarczy to udowodnić dla Ω środkowosymetrycznej względem środka i $u \in C^\infty(\Omega)$. Mamy

$$u(x) - u(y) = \int_0^1 < \nabla u(y + t(x-y)), x - y > dt.$$

Bierzemy całkę średnią po S względem y.

$$|u(x) - u_S| = \left| \fint_S \int_0^1 < \nabla u(y + t(x-y)), x - y > dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{diam}\Omega \fint_S \int_0^1 |\nabla u(y + t(x-y))| dt = \mathrm{diam}\Omega \int_0^1 \fint_S |\nabla u(y + t(x-y)) dy dt.$$

Zatem

$$|u(x) - u_S|^p \leqslant (\mathrm{diam}\Omega)^p \int_0^1 \fint_S |\nabla u(y + t(x-y))|^p dy dt.$$

Całkujemy x po Ω.

$$\int_\Omega |u(x) - u_S|^p dx \leqslant (\mathrm{diam}\Omega)^p \frac{1}{|S|} \int_0^1 \int_{\Omega \times S} |\nabla u(y + t(x-y))|^p dx dy dt.$$

Robimy zamianę zmiennych $(x, y) \to (\xi, \zeta)$ z ustalonym t, $\xi = y + t(x-y) \in \Omega$, $\zeta = y - x \in \Omega - \Omega = 2\Omega$, $dxdy = d\xi d\zeta$. Stąd ostatnie wyrażenie możemy oszacować przez

$$(\mathrm{diam}\Omega)^p \frac{|2\Omega|}{|S|} \int_0^1 \int_\Omega |\nabla u(\xi)| d\xi,$$

co kończy dowód. $\square$

Teraz jest patologiczny przykład Nikodyma podany w książce Mazii (kiedyś chyba był nawet na okładce). Dalej jest przykład z grzybkami pochodzący od Mazii.

Definicja 62. *Powiemy, że Ω spełnia warunek stożka wewnętrznego, jeśli istnieją $\alpha, \beta > 0$ takie, że*

$$C_{\alpha,\beta} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < \beta x_n^2,\ 0 < x_n < \alpha\}.$$

taki, że każdy punkt $x \in \Omega$ jest wierzchołkiem pewnego stożka C_x izometrycznego do $C_{\alpha,\beta}$ zawartego wraz z domknięciem w Ω.

Twierdzenie 63. *Formuła reprezentująca, nierówność Poincarego, a więc $BL = \dot{W} = W$ zachodzą na zbiorach spełniających warunek stożka wewnętrznego.*

Dowód powyższego opiera się na następującym fakcie.

Twierdzenie 64. *Jeśli Ω ma własność stożka, to można je przedstawić w postaci skończonej sumy zbiorów gwiaździstych względem kul.*

Dowód. Po pierwsze, zachodzi

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} C_x.$$

Każde C_x jest zbiorem gwiaździstym względem kuli $B_x = B(\sigma(x), R)$. Niech C_x będzie jednym ze stożków. Weźmy wszystkie stożki C_Y takie, że $|\sigma(y) - \sigma(x)| < \frac{R}{2}$ i niech Ω_1 będzie sumą tych stożków (zauważamy, że wszystkie B_y i kula B_x zawierają $B_1 = (\sigma(x), \frac{R}{2})$). Bez trudu widzimy także, że Ω_1 jest zbiorem gwiaździstym względem B_1. W kolejnym kroku bierzemy $z \notin \Omega_1$ takie, że $|\sigma(z) - \sigma(x)| \geqslant \frac{R}{2}$. Konstruujemy Ω_2 tak jak wcześniej, które wyjdzie nam gwiaździste względem $B_2 = B(\sigma(z), \frac{R}{2})$. Kule B_i mają równy promień i mają środki odległe o co najmniej $\frac{R}{2}$, czyli może być ich tylko skończenie wiele, a stąd konstrukcja jest skończona. □

Potrzebujemy kilku faktów ogólnych.

Fakt 65. *Z każdego ciągu w refleksywnej przestrzeni unormowanej X możemy wybrać podciąg słabo zbieżny.*

Fakt 66. *Domknięte podprzestrzenie przestrzeni refleksywnej są refleksywne.*

Wniosek 67. *Przestrzeń $W^{1,p}(\Omega)$ jest refleksywna dla $1 < p < \infty$.*

Dowód. To jest jasne, bo $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $u \mapsto (u, \nabla u)$ i obraz jest domknięty. □

Przechodzimy do charakteryzacji przestrzeni Sobolewa w terminach ilorazów różnicowych.

Twierdzenie 68. *Niech $1 < p < \infty$. Wówczas $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. $$\underset{C>0}{\exists} \underset{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}{\forall} \left|\left|\frac{u(\cdot+h)-u(\cdot)}{h}\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C.$$

Dowód. Dowodzimy implikację $1 \Rightarrow 2$. Weźmy $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wówczas

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 < \nabla u(x+th), h > dt.$$

Stąd

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h)-u(x)|^p dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_0^1 < \nabla u(x+th), h > dt\right|^p dx$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p |h|^p dt = |h|^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x+th)|^p dx dx = |h|^p ||\nabla u||^p_{L^p}.$$

Zatem

$$\left|\left|\frac{u(\cdot+h)-u(\cdot)}{h}\right|\right|_{L^p} \leqslant ||\nabla u||_{L^p}$$

dla wszystkich $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, więc z gęstości otrzymujemy tezę.
Czas na implikację $2 \Rightarrow 1$. Przyjmy $h_k = s_k e_i$, gdzie $s_k \to 0$. Z założenia mamy

$$\left|\left|\frac{u(\cdot+s_k e_i)-u(\cdot)}{s_k}\right|\right|_p \leqslant C.$$

Istnieje podciąg (oznaczamy tak samo) $s_k \to 0$ taki, że

$$\frac{u(\cdot+s_k e_i)-u(\cdot)}{s_k} \rightharpoonup v \in L^p.$$

Weźmy $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wówczas

$$\int_{\mathbb{R}^n} v\varphi = \widehat{\varphi}(v) = \lim_{k\to\infty} \widehat{\varphi}\left(\frac{u(\cdot+s_k e_i)-u(\cdot)}{s_k}\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+s_k e_i)-u(x)}{s_k}\varphi(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\frac{\varphi(x-s_k e_i)-\varphi(x)}{s_k}dx$$
$$\to -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\delta_{x_i}\varphi(x)dx.$$

□

Ćwiczenie 69. *Udowodnić, że dla $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ilorazy różnicowe zbiegają w L^p.*

Przymierzamy się teraz do **twierdzeń o włożeniu**. Zaczniemy od przypomnienia lematu pokryciowego Vitaliego.

Lemat 70 (Vitali)**.** *Niech*

$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i, \text{ gdzie } B_i \text{ są kulami.}$$

Wówczas istnieją $i_1, \dots, i_k$ *takie, że kule* $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$ *są rozłączne i*

$$\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{k} 3B_{i_j}.$$

Dowód. Niech B_{i_1} będzie największą z kul $B_1, \dots, B_m$. Dalej, niech B_{i_2} będzie największą z pozostałych kul, które są rozłączne z B_{i_1}. Kontynuując ten prosce dostajemy ciąg kul $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$. Dowolna kula $B \in \{B_1, \dots, B_m\}$ została wybrana, bądź przecina pewną kulę z $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_k}\}$. Niech B_{i_l} będzie kulą o najmniejszym indeksie taką, że $B \cap B_{i_l} \neq \emptyset$. Niech r będzie promieniem kuli B, zaś R - promieniem kuli B_{i_l}. Z wyboru kuli B_{i_l} wynika, że $r \leqslant R$. Weźmy teraz y z brzegu kuli B i oznaczmy przez x środek kuli B_{i_l}. Otrzymujemy z łatwością

$$|x - y| \leqslant R + 2r \leqslant 3R, \text{ a stąd } B \subset 3B_{i_j}.$$

Ostatnie zawieranie kończy dowód, gdyż

$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset \bigcup_{j=1}^{k} 3B_{i_j}.$$

□

Wprowadzimy teraz kluczowy dla dalszych rozważa obiekt.

Definicja 71. *Niech* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*. Określamy funkcję maksymalną Hardy'ego - Littlewooda wzorem*

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \fint_B |f|, \text{ gdzie supremum jest brane po wszystkich kulach zawierających } x.$$

Podstawowe własności funkcji maksymalnej są zebrane w poniższym słynnym twierdzeniu.

Twierdzenie 72 (Hardy,Littlewood,Wiener)**.** *Funkcja maksymalna ma następujące własnoći*

1. *Jeśli* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $1 \leqslant p < \infty$*, to* $Mf(x) < \infty$ *dla prawie wszystkich* $x \in \mathbb{R}^n$*.*
2. *Jeśli* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $1 < p < \infty$*, to* $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *oraz* $||Mf||_p \leqslant C(n,p)||f||_p$*.*

3. Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leqslant \frac{3^n ||f||_1}{t}.$$

Dowód. Punkt 1 wynika oczywiście z pozostałych, zacznijmy więc od dowodu punktu 3. Niech $x \in \{Mf > t\}$. Z definicji funkcji maksymalnej istnieje kula $B_x \ni x$ taka, że

$$\fint_{B_x} |f| > t, \text{ czyli } |B_x| < \frac{1}{t} \int_{B_x} |f| \leqslant \frac{1}{t} ||f||_1.$$

Weźmy teraz dowolny zbiór zwarty $K \subset \{Mf > t\}$. Pokrywamy go kulami B_x spełniającymi ostatnią nierówność. Korzystając ze zwartości K wybieramy skończone podpokrycie i w oparciu o lemat Vitaliego dostajemy rozłączną rodzinę kul $B_1, B_2, \ldots, B_m$ takich, że

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} 3B_i \text{ oraz } |B_i| < \frac{1}{t} \int_{B_i} |f|.$$

Wykonujemy prosty rachunek

$$|K| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |3B_i| \leqslant 3^n \sum_{i=1}^{m} |B_i| \leqslant \frac{3^n}{t} \int_{\bigcup_{i=1}^{m} B_i} |f| leq \frac{3^n ||f||_1}{t}.$$

Z regularności miary Lebesgue'a kończymy dowód

$$|\{Mf > t\}| = \sup_{K \subset \{Mf > t\}} |K| \leqslant \frac{3^n ||f||_1}{t}.$$

Część 2 twierdzenia wywnioskujemy z punktu 3. W tym celu weźmy $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ i rozłóżmy ją na sumę $f = f^t + f_t$, gdzie $f^t = f \cdot \chi_{|f|>t}$ oraz $f_t = f \cdot \chi_{|f| \leqslant t}$. Funkcja maksymalna jest operatorem podliniowym, więc

$$Mf \leqslant Mf^t + Mf_t \leqslant Mf^t + t.$$

Przyglądamy się $x \in \mathbb{R}^n$ takim, że $Mf(x) > t$. Wtedy

$$t < Mf(x) \leqslant Mf^{\frac{t}{2}}(x) + \frac{t}{2}.$$

Zatem nierównosc $Mf(x) > t$ implikuje $Mf^{\frac{t}{2}}(x) > \frac{t}{2}$. Prowadzi to do zawierania zbiorów

$$\{Mf > t\} \subset \{Mf^{\frac{t}{2}} > \frac{t}{2}\}.$$

Teraz liczymy korzystając z udowodnionego wcześniej punktu 3 naszego twierdzenia.

$$|\{Mf > t\}| \leqslant \left| \{Mf^{\frac{t}{2}} > \frac{t}{2}\} \right| \leqslant \frac{2 \cdot 3^n}{t} ||f^{\frac{t}{2}}||_1 = \frac{2 \cdot 3^n}{t} \int_{|f| > \frac{t}{2}} |f|.$$

Korzystając ze znanego wzoru dla funkcji $g \geqslant 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\,|\{g>t\}|\,dt$$

uzyskujemy

$$||Mf||_p^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\,|\{Mf>t\}|\,dt \leqslant p\int_0^\infty \frac{2\cdot 3^n}{t}\int_{|f|>\frac{t}{2}} |f(x)|\chi_{(x,t):|f(x)|>\frac{t}{2}}(x,t)dxdt =$$

$$p\cdot 2\cdot 3^n \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t^{p-2}|f(x)|\chi_{(x,t):t<2|f(x)|}(x,t)dxdt = p\cdot 2\cdot 3^n\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\int_0^{2|f(x)|} t^{p-2}dtdx =$$

$$= p\cdot 2\cdot 3^n\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\cdot\frac{2^{p-1}|f(x)|^{p-1}}{p-1}dx = C(n,p)||f||_p^p.$$

□

Wprowadzimy teraz **potencjały Riesza**.

Definicja 73. *Dla $a \in (0,n)$ określamy operator całkowania ułamkowego (potencjał Riesza) I_a wzorem*

$$I_a f(x) = \frac{1}{\gamma(a)}\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{a-n}f(y)dy, \text{ gdzie } \gamma(a) = 2^a\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{a}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{a}{2})}.$$

Uwaga 74. *Operatory Riesza spełniają następujące tożsamości (dla odpowienio dobranych funkcji f).*

1. $I_{a+b} = I_a \circ I_b$.
2. $\triangle(I_a f) = I_a(\triangle f) = -I_{a-2}f$.

W szczególności, $I_2 = (-\triangle)^{-1}$. Możemy także napisać ogólnie $I_a = (-\triangle)^{-\frac{a}{2}}$.

Podstawowe własności pontecjałów Riesza opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 75 (Hardy'ego - Littlewooda - Sobolewa o całkowaniu ułamkowym)**.** *Niech $a \in (0,n)$, $1 \leqslant p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$. Wówczas*

1. *Dla $p>1$ i $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zachodzi $I_a f \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Co więcej operator I_a jest ciągły z $L^p(\mathbb{R}^n)$ do $L^q(\mathbb{R}^n)$ i zachodzi nierówność $||I_a f||_q \leqslant C(a,n,p)||f||_p$.*
2. *Dla $p = 1$ oraz $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zachodzi następujące oszacowanie (słaby typ $(1, \frac{n}{n-a})$)*

$$|\{I_a f > t\}| \leqslant \left(\frac{C(a,n)||f||_1}{t}\right)^{\frac{n}{n-a}}.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić twierdzenie dla $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Możemy napisać

$$|I_a f(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{a-n}|f(y)|dy = \int_{B(x,\varepsilon)}|x-a|^n|f(y)|dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\varepsilon)}|x-y|^{a-n}|f(y)|dy = S_1+S_2.$$

Rozważmy zbiory $A_k = \{y : |x-y| \in \left[\frac{\varepsilon}{2^k}, \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}\right]\}$, $B_k = B(x, \frac{\varepsilon}{2^{k-1}})$. Bez trudu dostrzegamy, że dla $x \in A_k$ prawdą jest, iż

$$|x-y| \approx \frac{\varepsilon}{2^k}, \text{ a więc } |x-y|^{-n} \approx \frac{2^{nk}}{\varepsilon^n} \approx |A_k|^{-1} \approx |B_k|^{-1}.$$

Korzystając z tych obserwacji piszemy oszacowania

$$S_1 = \int_{B(x,\varepsilon)} |x-y|^{a-n}|f(y)|dy \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)^a |B_k|^{-1} \int_{B_k} |f(y)|dy \leqslant$$
$$Mf(x) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)^a \lesssim \varepsilon^a Mf(x).$$

Tym razem zastosujemy nierówność Höldera

$$S_2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\varepsilon)} \left(|x-y|^{a-n}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p}{p-1}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\varepsilon)} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\frac{n\omega_n(p-1)}{n-ap}\right]^{\frac{p-1}{p}} \varepsilon^{a-\frac{n}{p}}||f||_p,$$

gdzie ostatnią nierówność sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem. Zbierając obie nierówności dostajemy

$$|I_a f(x)| \leqslant C(n,p,a)\left[\varepsilon^a Mf(x) + \varepsilon^{a-\frac{n}{p}}||f||_p\right].$$

Bierzemy teraz

$$\varepsilon = \left[\frac{||f||_p}{Mf(x)}\right]^{\frac{p}{n}}$$

otrzymując

$$|I_a f(x)| \leqslant C(a,n,p)||f||_p^{\frac{ap}{n}} Mf(x)^{1-\frac{ap}{n}}.$$

Korzystając teraz z ograniczoności funckji maksymalnej w $L^p(\mathbb{R}^n)$ dostajemy tezę. $\square$

Możemy już sformułować i udowodnić nierówność Sobolewa.

Twierdzenie 76 (Nierówność Sobolewa)**.** *Niech* $1 < p \leqslant q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$. *Wówczas dla* $u \in W^{1,p}$ *zachodzi nierówność*

$$\left(\fint_B |u(x) - u_B|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \cdot r \left(\fint_B |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podobna nierówność zachodzi dla dowolnych obszarów z własnością stożka.

Dowód. Piszemy

$$|u(x) - u_B| \leqslant C(n) \int_B \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy = c(n) I_1(|\nabla u|\chi_B)(x)$$

dla prawie wszystkich $x \in B$. Z twierdzenia Hardy'ego - Littlewooda - Sobolewa mamy jednak

$$||I_1(|\nabla u|\chi_B)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C||\nabla u \chi_B||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C||\nabla u||_{L^p(B)},$$

co kończy dowód. □

Czas na twierdzenie Sobolewa w przypadku $p = 1$.

Twierdzenie 77. *Niech $f \in W_1^1(Q)$. Wówczas*

$$||f||_{L^{\frac{n}{n-1}}(Q)} \leqslant ||\nabla f||_{L^1(Q)} + \frac{1}{|Q|}||f||_{L^1(Q)}$$
$$||f||_{L^\infty([0,1])} \leqslant ||f'||_{L^1([0,1])} + ||f||_{L^1([0,1])}$$

Dowód. Można założyć, że $f \in C^\infty(Q)$. Ponadto wystarczy udowodnić nierówność dla $Q = [0,1]^n$. Istotnie, niech $A : [0,1]^n \mapsto Q$, $A(x) = \lambda x + x_0$ oraz $f : Q \mapsto \mathbb{R}$. Wówczas łatwo sprawdzić, iż dowód będzie zakończony, gdy wykonamy go dla $g(x) = f(Ax)$, $g : [0,1]^n \mapsto \mathbb{R}$. Główna część dowodu polega na indukcji po n. Niech $n = 1$. Z twierdzenia o wartości średniej dla całek mamy

$$\underset{y \in (0,1)}{\exists} |f(y)| = \fint_{[0,1]} |f(t)|dt = ||f||_{L^1([0,1])}.$$

Ponadto,

$$\underset{t \in [0,1]}{\forall} f(t) = \int_y^t f'(s)ds + f(y).$$

Zatem

$$|f(t)| \leqslant \int_0^1 |f'(s)|ds + |f(y)| = ||f'||_{L^1([0,1])} + ||f||_{L^1([0,1])}.$$

Zakładamy teraz, iż dla $\widetilde{Q} = [0,1]^{n-1}$ i gładkich funkcji $h : \widetilde{Q} \mapsto \mathbb{R}$ mamy

$$||h||_{L^{\frac{n-1}{n-2}}(\widetilde{Q})} \leqslant ||h||_{L^1(\widetilde{Q})} + ||\nabla h||_{L^1(\widetilde{Q})}.$$

W kroku indukcyjnym niech $(t,y) \in Q = [0,1] \times \widetilde{Q}$. Wtedy

$$\underset{y \in \widetilde{Q}}{\forall} \underset{t \in [0,1]}{\forall} |f(t,y)| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\tau, y)\right| d\tau + \int_0^1 |f(\tau,y)|d\tau.$$

Podobnie,

$$\int_{\widetilde{Q}} |f(t,y)|dy \leqslant \int_Q |\nabla f(\tau,y)d\tau dy + \int_Q |f(\tau,y)|d\tau dy = ||\nabla f||_{L^1(Q)} + ||f||_{L^1(Q)}. \tag{1}$$

Korzystając z nierówności Höldera otrzymamy

$$\int_{\widetilde{Q}} |f(t,y)|^{\frac{n}{n-1}} dy = \int_{\widetilde{Q}} |f|^{\frac{1}{n-1}} |f| dy \leqslant$$

$$\left(\int_{\widetilde{Q}} |f|\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{\widetilde{Q}} |f|^{\frac{n-1}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} = ||f(t,\cdot)||_{L^1(\widetilde{Q})}^{\frac{1}{n}-1} \cdot ||f(t,\cdot)||_{L^{\frac{n-1}{n-2}}(\widetilde{Q})}.$$

Z równania 1 i założenia indukcyjnego ostatni iloczyn jest mniejszy równy od

$$(||\nabla f||_{L^1(Q)} + ||f||_{L^1(Q)})^{\frac{1}{n-1}} (||f(t,\cdot)||_{L^1(\widetilde{Q})} + ||\nabla f(t,\cdot)||_{L^1(\widetilde{Q})}.$$

Całkujemy po t od 0 do 1. Stąd

$$||f||_{L^{\frac{n}{n-1}}(Q)}^{\frac{n}{n-1}} \leqslant (||\nabla f||_{L^1(Q)} + ||f||_{L^1(Q)})^{\frac{1}{n-1}} (||f||_{L^1(Q)} + ||\nabla f||_{L^1(Q)})^{\frac{n}{n-1}},$$

co kończy dowód. □

Ćwiczenie 78. *Wywnioskować z ostatniego twierdzenia nierówność Sobolewa dla* $f \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$.

Definicja 79. *Mówimy, że* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *nie ma zewnętrzych ostrzy, gdy*

$$\underset{A>0}{\exists} \underset{x\in\overline{\Omega}}{\forall} \underset{r\in(0,\mathrm{diam}\Omega)}{\forall} \omega_n r^n \geqslant |B(x,r)\cap\Omega| \geqslant A|B(x,r)| = A\omega_n r^n.$$

Tę kulę wewnętrzną będziemy oznaczać przez $\widetilde{B}(x,r)$, *a całkę średnią po niej przez* $u_{x,r}$.

Ćwiczenie 80. *Jeżeli* Ω *jak wyżej, to dla* $r,s \in (0,\mathrm{diam}\Omega]$ *zachodzi*

$$A(\frac{s}{r})^n|\widetilde{B}(x,r)| \leqslant |\widetilde{B}(x,s)| \leqslant A^{-1}(\frac{s}{r})^n|\widetilde{B}(x,r)|.$$

Lemat 81. *Istnieje* $C = C(\Omega,n,\lambda,p)$ *taka, że*

$$\underset{x\in\overline{\Omega}}{\forall} \underset{r,s:0<r\leqslant s\leqslant\mathrm{diam}\Omega}{\forall} |u_{x,r} - u_{x,s}| \leqslant C[u]_{p,\lambda} s^\alpha.$$

Dowód. Niech $0 < \rho \leqslant \sigma \leqslant \mathrm{diam}\Omega$. Wówczas

$$|u_\rho - u_\sigma| = \left|\fint_{\widetilde{B}(x,\rho)} (u-u_\sigma)\right| \leqslant \fint_{\widetilde{B}(x,\rho)} |u-u_\sigma| \leqslant$$

$$\left(\fint_{\widetilde{B}(x,\rho)} |u-u_\sigma|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{|\widetilde{B}(x,\rho)|^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{\widetilde{B}(x,\rho)} |u-u_\sigma|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\rho^{-\frac{n}{p}} \sigma^{\frac{\lambda}{p}} \left(\sigma^{-\lambda} \int_{\widetilde{B}(x,\sigma)} |u-u_\sigma|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \rho^{-\frac{n}{p}} \sigma^{\frac{\sigma}{p}} [u]_{p,\lambda}.$$

Niech $s_1 = s$, $s_2 = \frac{1}{2}s, \ldots, s_k = \frac{s}{2^{k-1}}$, $s_k \geqslant r > s_{k+1}$ oraz $\frac{r}{s} \in [2^{-k}, 2^{-k+1}]$.

$$|u_s - u_r| = |u_s - u_{s_{k+1}}| + |u_r - u_{s_{k+1}}| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |u_{s_j} - u_{s_{j+1}}| + |u_r - u_{s_{k+1}}| \leqslant$$

$$\preceq \sum_{j=1}^{k} s_j^{\frac{\lambda}{p}} s_{j+1}^{-\frac{n}{p}} [u]_{p,\lambda} + r^{\frac{\lambda}{p}} s_{k+1}^{-\frac{n}{p}} [u]_{p,\lambda} \leqslant$$

$$Cs^{\frac{\lambda-n}{p}}[u]_{p,\lambda}.$$

□

Lemat 82. *Niech $x, y \in \overline{\Omega}$, $|x-y| = R$. Wtedy*

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leqslant CR^{\alpha}[u]_{p,\lambda}.$$

Dowód. Niech $z \in \widetilde{B}(x,2R) \cap \widetilde{B}(x,R) = F$. Stąd

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leqslant |u(z) - u_{x,2R}| + |u(z) - u_{y,2R}|.$$

Zauważmy, że $\widetilde{B}(x,R), \widetilde{B}(y,R) \subset F$, a stąd

$$\fint_F |u(z) - u_{x,2R}| \leqslant \frac{1}{|\widetilde{B}(x,R)| \int_F |u(z) - u_{x,2R}|} \leqslant C(A) \frac{1}{|\widetilde{B}(x,2R)|} \int_{B(x,2R)} |u(z) - u_{x,2R}| \leqslant$$

$$C\left(\frac{1}{\widetilde{B}(x,2R)} \int_{B(x,2R)} |u - u_{x,2R}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = c\left(R^{\lambda-n}R^{-\lambda} \int_{\widetilde{B}(x,2R)} |u - u_{x,2R}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant CR^{\alpha}[u]_{p,\lambda}.$$

Drugą całkę szacujemy tak samo. □

Twierdzenie 83 (Campanato)**.** *Niech Ω będzie obszarem bez zewnętrznych ostrzy. Załóżmy, że $u \in L^p(\Omega)$ oraz dla pewnego $\lambda \in (n, n+p)$ zachodzi*

$$[u]^p_{p,\lambda} = \sup\left\{R^{-\lambda} \int_{\widetilde{B(x,R)}} |u(y) - u_{x,R}|^p dy : x \in \overline{\Omega}, R \in (0, \mathrm{diam}\Omega)\right\} < \infty.$$

Wówczas istnieje $v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ dla $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$ takie, że $v = u$ prawie wszędzie.

Dowód. Określmy

$$v(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{\widetilde{B}(x,r)} u(z)dz \text{ dla p.w. } x \in \Omega\ v(x) = u(x).$$

Liczymy

$$|v(x) - v(y)| \leqslant |v(x) - v_{x,2R}| + |v_{x,2R} - v_{y,2R}| + |v(y) - v_{y,2R}|.$$

Przyjmujemy $|x-y| = R$. Przechodząc do granicy $R \to 0$ w Lemacie 81 mamy

$$|v(x) - v_{x,2R}| \leqslant C[u]_{p,\lambda}(2R)^{\alpha}$$

ostatni składnik szacujemy tak samo. Dla drugiego stosujemy Lemat 82

$$|v(x, 2R) - v_{y,2R}| = |u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leqslant CR^\alpha [u]_{p,\lambda}$$

i to jest koniec. $\square$

Ćwiczenie 84. *Wywnioskować twierdzenie Morreya.*
Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ma własność stożka wewnętrznego,* $p > n$, $f \in W^1_p(\Omega)$. *Wówczas istnieje* $g \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$ *taka, że* $f = g$ *prawie wszędzie na* Ω.